DS6

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Ecricome 2015)

1. (a) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(P)$ est bien un polynôme, et :

$$\deg(P'') \leq \deg(P) - 2 \leq n \quad \text{et} \quad \deg(-2XP') = 1 + \deg(P') \leq 1 + \deg(P) - 1 = \deg(P).$$

Par somme :

$$\deg(P'' - 2XP') \leq \max(\deg(P''), \deg(-2XP')) \leq \deg(P) \leq n.$$

Ainsi, l'application φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[x]$.
Montrons la linéarité de φ. Soient pour cela $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Calculons :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'' - 2X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' \\ &= \lambda_1 P_1'' + \lambda_2 P_2'' - 2X(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda_1(P_1'' - 2XP_1') + \lambda_2(P_2'' - 2XP_2') \\ &= \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

(b) On a :

$$\varphi(1) = 0 \quad ; \quad \varphi(X) = -2X$$

et pour tout $2 \leq k \leq n$:

$$\varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2kX^k$$

La matrice associée à φ dans la base canonique de E est :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -4 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2n \end{pmatrix}}.$$

(c) La matrice M étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(\varphi) = \mathrm{Spec}(M) = \{0, -2, -4, \dots, -2n\}.}$$

M est de taille $(n+1)$ et admet $n+1$ valeurs propres distinctes. Donc $\boxed{M \text{ (et } \varphi) \text{ est diagonalisable.}}$

Remarque. On sait de plus que tous les sous-espaces propres de φ sont de dimension 1.

2. (a) Si P ou Q est nul, $\langle P, Q\rangle$ est bien défini. Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de degrés respectifs p et q positifs. L'application $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$ est donc généralisée en $+\infty$ et $-\infty$. On montre la convergence en $+\infty$:

- $P(t)Q(t)e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ puisque $\frac{P(t)Q(t)e^{-t^2}}{1/t^2} \underset{+\infty}{\sim} a_p b_q t^{p+q+2} e^{-t^2}$ qui tend bien vers 0 en $+\infty$ par croissance comparée ;

- $\frac{1}{t^2} \geq 0$ au voisinage de $+\infty$;
- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge comme intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$ en l'infini.

Par critère de comparaison, on en déduit que $\int_1^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En procédant de même, on montre que $\int_{-\infty}^{-1} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge bien. $\boxed{\text{Ainsi pour tout } (P,Q) \in E^2,\ \langle P,Q\rangle \text{ est bien défini.}}$

(b) Montrons que $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ définit un produit scalaire sur E :

- **Linéarité à gauche.** Pour tout $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t))Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{(tout converge)} \\
&= \lambda_1\langle P_1, Q\rangle + \lambda_2\langle P_2, Q\rangle
\end{aligned}$$

- **Symétrie.** Pour tout $P, Q \in E$:

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = < Q,P\rangle$$

  En particulier, on en déduit que $\langle , \rangle$ est linéaire à droite.

- **Positivité.** Pour tout $P \in E$:

$$\langle P,P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

  Or l'intégrale d'une fonction positive est positive. Donc $\langle P,P\rangle \geq 0$.

- **Définie.** Soit P tel que $\langle P,P\rangle = 0$. Alors :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

  Or $t \mapsto P(t)^2 e^{-t^2}$ est **continue** et **positive** sur $\mathbb{R}$. Son intégrale est donc nulle si, et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t)^2 e^{-t^2} = 0.$$

  Puisque $e^{-t^2} \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il suit que $P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = 0.$$

  P est un polynôme admettant une infinité de racines (tous les réels). C'est donc le polynôme nul. Donc $P = 0_E$ et $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est défini.

Ainsi $\boxed{(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle \text{ définit un produit scalaire sur } E.}$

3. (a) Soient $(P,Q) \in E^2$. Calculons :

$$\langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P)(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale (possible ici car toutes les intégrales convergent d'après 2.(a)) :

$$\langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} 2tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Soient $a < b$. On fait une intégration par parties sur le segment $[a, b]$ dans la deuxième intégrale :

$$\begin{array}{c|ccc} + & P'(t)Q(t) & & 2te^{-t^2} \\ & & \searrow & \\ - & P''(t)Q(t) + P'(t)Q'(t) & \xleftarrow{\int} & -e^{-t^2} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto P'(t)Q(t)$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. On obtient donc :

$$\int_a^b 2tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = \Big[P'(t)Q(t)(-e^{-t^2})\Big]_a^b + \int_a^b P''(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_a^b P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

On passe à la limite quand $b \to +\infty$. C'est possible car toutes les intégrales convergent d'après 2.(a), et le terme entre crochets tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées (de la forme polynôme $\times$ exponentielle). On obtient donc :

$$\int_a^{+\infty} 2tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = P'(a)Q(a)e^{-a^2} + \int_a^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

De même, en faisant tendre a vers $-\infty$ (tout converge), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \langle \varphi(P), Q\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &\boxed{= -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t.} \end{aligned}$$

(b) Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle \varphi(P), Q\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

De plus :

$$\begin{aligned} \langle P, \varphi(Q)\rangle &= \langle \varphi(Q), P\rangle \quad \text{par symétrie du produit scalaire} \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} Q'(t)P'(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t \boxed{= \langle \varphi(P), Q\rangle.} \end{aligned}$$

Remarque. Un endomorphisme satisfaisant une telle égalité est dit *symétrique* pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. (a) Montrons par récurrence sur i que pour tout $0 \leq k \leq n$, P_k est bien défini et $\deg(P_k) = k$.

Init. $P_0 = 1$ donc P_0 est bien défini et $\deg(P_0) = 0$. Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hér. Soit $0 \leq k \leq n-1$ et supposons la propriété vraie pour tout $0 \leq j \leq k$. Montrons la propriété au rang $k+1$.

Par hypothèse de récurrence, les polynômes P_i sont bien défini pour tout $0 \leq i \leq k$ et de degré i. On pose :

$$P_{k+1} = X^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i$$

Puisque pour tout $0 \leq i \leq k$, $\deg(P_i) = i$, $P_i \neq 0$ en particulier, et donc $\langle P_i, P_i\rangle = \|P_i\|^2 \neq 0$. Ainsi, P_{k+1} est bien défini (l'expression définissant P_{k+1} a bien un sens).

On cherche à présent son degré. Puisque $\deg(P_i) = i$ pour tout $0 \leq i \leq k$:

$$\deg\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i\right) \leq k.$$

Ainsi, P_{k+1} est de degré $k+1$. D'où la propriété au rang $k+1$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{le polynôme } P_k \text{ est bien défini et de degré } k \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n.}$

(b) Montrons par récurrence que pour tout $0 \leq k \leq n$, la famille $(P_0, \ldots, P_k)$ est orthogonale.

Init. $P_0 = 1$ donc (P_0) est bien une famille orthogonale (automatique pour une famille d'un vecteur). Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hér. Soit $0 \leq k \leq n-1$ et supposons la propriété vraie. Montrons la propriété au rang $k+1$.

Par hypothèse de récurrence, $(P_0, \ldots, P_k)$ est orthogonale. Montrons que $(P_0, \ldots, P_{k+1})$ l'est aussi. Pour tout $0 \leq j \leq k$:

$$\begin{aligned}
\langle P_{k+1}, P_j\rangle &= \langle X^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i, P_j\rangle \\
&= \langle X^{k+1}, P_j\rangle - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} \langle P_i, P_j\rangle \text{ par lin. à gauche} \\
&= \langle X^{k+1}, P_j\rangle - \frac{\langle P_j, X^{k+1}\rangle}{\langle P_j, P_j\rangle} \langle P_j, P_j\rangle \text{ car } \langle P_i, P_j\rangle = 0 \text{ si } i \neq j \text{ par H.R.} \\
&= \langle X^{k+1}, P_j\rangle - \langle P_j, X^{k+1}\rangle = 0
\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $k+1$.

Par principe de récurrence, $\boxed{(P_0, \ldots, P_n) \text{ est une famille orthogonale.}}$

Remarque. On reconnait ici le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, $P_0 = 1$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle \frac{P_i}{\|P_i\|}, X^k\rangle \frac{P_i}{\|P_i\|}.$$

La seule différence ici est qu'on ne normalise pas les vecteurs P_k à la fin de chaque étape.

(c) Montrons que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k) = \mathbb{R}_k[X]$. On a montré que pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, $\deg(P_j) = j$. Donc en particulier :

$$\forall j \in \{0, \ldots, k\}, \quad P_j \in \mathbb{R}_k[X] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k) \subset \mathbb{R}_k[X]$$

Or $(P_0, \ldots, P_k)$ est une famille de polynômes étagée en degré. Elle est donc libre. Ainsi :

$$\dim(\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k)) = k+1 = \dim(\mathbb{R}_k[X]).$$

D'où finalement :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k) = \mathbb{R}_k[X].}$$

(d) Soit $1 \leq k \leq n$, et soit $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1})$. Il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$ tels que :

$$P = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{k-1} P_{k-1}.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \langle P, P_k\rangle &= \langle \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i P_i, P_k\rangle = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \langle P_i, P_k\rangle \quad \text{par linéarité à gauche} \\ &\boxed{= 0} \quad \text{car } \langle P_i, P_k\rangle = 0 \text{ pour tout } i < k. \end{aligned}$$

5. (a) Commençons par un rappel de cours.

> **Rappel. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.**
> Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Pour tout $x \in E$:
> $$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Ici, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale et ne contient pas le vecteur nul. Donc $\mathscr{B} = \left(\frac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \frac{P_n}{\|P_n\|}\right)$ est une famille orthonormale de $(\mathbb{R}_n[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Elle est en particulier libre, de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. C'est donc une base orthonormée de $(\mathbb{R}_n[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

D'après le rappel, on peut décomposer le vecteur $\varphi(P_k)$ dans la base orthonormée $\mathscr{B}$:

$$\varphi(P_k) = \sum_{i=0}^{n} \langle \varphi(P_k), \frac{P_i}{\|P_i\|}\rangle \frac{P_i}{\|P_i\|} \boxed{= \sum_{i=0}^{n} \langle \varphi(P_k), P_i\rangle \frac{P_i}{\|P_i\|^2}} \qquad (*)$$

par linéarité à droite.

(b) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$ distinct de k. Deux cas sont à considérer :

- Cas $i > k$. Dans ce cas, on remarque que $\varphi(P_k)$ est de degré $\leq k$ par définition de φ, et on sait que P_i est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}_{i-1}[X]$, et donc en particulier à $\varphi(P_k)$. On a donc dans ce cas :

$$\langle \varphi(P_k), P_i\rangle = 0.$$

- Cas $i < k$. Par la question 3.(b) :

$$\langle \varphi(P_k), P_i\rangle = \langle P_k, \varphi(P_i)\rangle.$$

On peut alors utiliser le même argument : P_k est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, et donc à $\varphi(P^i)$, de sorte que :

$$\langle \varphi(P_k), P_i\rangle = \langle P_k, \varphi(P_i)\rangle = 0.$$

Dans tous les cas : $\boxed{\langle \varphi(P_k), P_i\rangle = 0.}$

(c) Calculons :

$$\begin{aligned} \langle \varphi(P_k), P_k\rangle &= \langle \varphi\left(X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i\right), P_k\rangle \\ &= \langle \varphi(X^k) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} \varphi(P_i), P_k\rangle \quad \text{par linéarité de } \varphi \\ &= \langle \varphi(X^k), P_k\rangle - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} \langle \varphi(P_i), P_k\rangle \quad \text{par lin. à gauche de } \langle\cdot,\cdot\rangle. \end{aligned}$$

Or $\deg(P_i) = i$, de sorte que $\deg(\varphi(P_i)) \leq i$. Puisque P_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, on en déduit que pour tout $0 \leq i \leq k-1$:

$$\langle \varphi(P_i), P_k \rangle = 0.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\langle \varphi(P_k), P_k \rangle = \langle \varphi(X^k), P_k \rangle.}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(P_k), P_k \rangle &= \langle \varphi(X^k), P_k \rangle \quad \text{d'après 4.(d)} \\
&= \langle k(k-1)X^{k-2} - 2kX^k, P_k \rangle \\
&= \langle k(k-1)X^{k-2}, P_k \rangle - 2k\langle X^k, P_k \rangle \quad \text{par linéarité à gauche} \\
&= -2k\langle X^k, P_k \rangle \quad \text{car } k(k-1)X^{k-2} \perp P_k \\
&= -2k\langle X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i, P_k \rangle \quad \text{car } \left(-\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i \right) \perp P_k \\
&\boxed{= -2k\langle P_k, P_k \rangle}
\end{aligned}$$

(d) En substituant les résultats des deux questions précédentes dans l'égalité $(*)$ de la question 5.(a), on obtient :

$$\varphi(P_k) \overset{5.(a)}{=} \sum_{i=0}^{n} \langle \varphi(P_k), P_i \rangle \frac{P_i}{\|P_i\|^2} \overset{5.(b)}{=} \langle \varphi(P_k), P_k \rangle \frac{P_k}{\|P_k\|^2} \overset{5.(c)}{=} -2k\|P_k\|^2 \frac{P_k}{\|P_k\|^2} = -2kP_k.$$

Ainsi, P_k est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $-2k$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on en déduit que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale formée de vecteurs propres de φ. Reste à normaliser ces vecteurs.

$$\boxed{\mathscr{B} = \left(\frac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \frac{P_n}{\|P_n\|} \right) \text{ est une base orthonormée de } E \text{ formée de vecteurs propres de } \varphi.}$$

Exercice 2 (Edhec 2023)

Partie 1.

1. On sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M) = 1$. D'après le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) - \mathrm{rg}(f) = \boxed{n-1}$$

Donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$ et la dimension du sous-espace propre associé est $n-1$ (qui est bien ≥ 1 puisque $n \geq 2$).

2. (a) La matrice M est de rang 1 et sa première colonne (notée C) est non-nulle. Donc toutes les colonnes de M sont proportionnelles à C : il existe des réels $\ell_2, \dots, \ell_n$ tels que

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C & \ell_2 C & \dots & \ell_n C \end{array} \right) = C \times \begin{pmatrix} 1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$$

En notant $\ell_1 = 1$ et $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$, il suit que $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et :

$$\boxed{M = CL.}$$

(b) Notons $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors $M = CL = \begin{pmatrix} \ell_1 c_1 & \dots & \ell_n c_1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \ell_1 c_n & \dots & \ell_n c_n \end{pmatrix}$, et donc :

$$\mathrm{Tr}(M) = \ell_1 c_1 + \dots + \ell_n c_n = \sum_{k=1}^{n} \ell_k c_k$$

D'autre part :

$$LC = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \ell_k c_k$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Tr}(M) = LC}$

(c) Calculons :

$$M^2 = (CL)^2 = C(LC)L = C(\mathrm{Tr}(M))L = \mathrm{Tr}(M)CL \boxed{= \mathrm{Tr}(M)M}$$

car $LC = \mathrm{Tr}(M)$ et $CL = M$.

3. Calculons :

$$M \times C = (C \times L) \times C = C \times (L \times C) = C \times (\mathrm{Tr}(M)) = \mathrm{Tr}(M) \times C.$$

Puisque la matrice colonne C n'est pas nulle, $\mathrm{Tr}(M)$ est bien valeur propre de M et C est un vecteur propre associé.

L'endomorphisme f et la matrice M ayant les mêmes valeurs propres, $\boxed{\mathrm{Tr}(M) \text{ est donc valeur propre de } f}$

4. Supposons $\mathrm{Tr}(M) = 0$. L'égalité de la question 2.(c) devient :

$$M^2 = 0_n.$$

Donc $P = x^2$ est un polynôme annulateur de M. D'après le cours, les seules valeurs propres possibles de M sont les racines du polynôme P. Ici la seule racine de P est 0. Or, on a déjà établi en question 1. que 0 est valeur propre de M. Ainsi, 0 est l'unique valeur propre de M.

De plus :

$$\underbrace{\dim \mathrm{Ker}(M)}_{n-1} < \underbrace{\dim(\mathscr{M}_{n,1})}_{n}.$$

Donc la matrice $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

5. Supposons $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$. Dans ce cas, le polynôme $Q(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(M)x = x(x - \mathrm{Tr}(M))$ est annulateur de M, et donc de f. On en déduit, comme à la question précédente, que les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et $\mathrm{Tr}(M)$. Or :

- d'après la question 1., 0 est bien valeur propre de f avec pour dimension du sous-espace propre associé $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - 1$;
- d'après la question 3., $\mathrm{Tr}(M)$ est bien valeur propre de f, et $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Id})) \geq 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont 0 et } \mathrm{Tr}(M).}$

D'autre part, on sait par le cours que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Id})) \leq n.$$

On en déduit que :

- $\dim \mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Id}\big) = 1$, et puisque C est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Id}\big)$, $\mathrm{Ker}\big(f -$
$textTr(M)\mathrm{Id}\big)$ est égal à $\mathrm{Vect}(C)$;
- $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Id})) = n$.

Ceci prouve que $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

Partie 2.

6. (a) Supposons que $ac \neq b$, et résolvons :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{b} = 0 \\ ax + y + \dfrac{z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_1}}{\iff} \begin{cases} x + \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{b} = 0 \\ \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{a}{b}\right) z = 0 \\ \left(c - \dfrac{b}{a}\right) y = 0 \end{cases}$$

Puisque $ac \neq b$, alors $\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{a}{b}\right) \neq 0$ et $\left(c - \dfrac{b}{a}\right) \neq 0$, ce qui permet de poursuivre la résolution :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{b} = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

D'où l'équivalence suivante :

$$AX = 0 \iff X = 0$$

La matrice A serait donc inversible, ce qui contredit l'énoncé. Ainsi, on a bien démontré par l'absurde que $\boxed{ac = b}$

(b) On récrit la matrice A en remplaçant b par ac :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/ac \\ a & 1 & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$$

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice A, on remarque que :

- C_1 est non-nulle ;
- $C_2 = \dfrac{1}{a} C_1$;
- et $C_3 = \dfrac{1}{ac} C_1$.

Ainsi, $\boxed{\text{le rang de la matrice } A \text{ vaut } 1}$ et on va pouvoir appliquer à la matrice A les résultats établis en partie 1.

7. (a) D'après la question précédente, la matrice A est de rang 1. De plus, $\mathrm{Tr}(A) = 3 \neq 0$. D'après la question 5., $\boxed{g \text{ est diagonalisable}}$ et que les valeurs propres de g sont $\boxed{0 \text{ et } 3}$

(b) D'après la question 2.(c) :

$$A^2 = \mathrm{Tr}(A)A = 3A.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 3^{n-1}A$.

Initialisation. Pour $n = 1$, $A^1 = A$ et $3^{n-1}A = 3^0 A = A$. D'où la propriété au rang 1.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$A^n = 3^{n-1}A$$

Montrons que :

$$A^{n+1} = 3^n A$$

Calculons :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = 3^{n-1}A \times A \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= 3^{n-1}A^2 = 3^{n-1} \times (3A) = 3^n A \end{aligned}$$

Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 3^{n-1}A$.

En particulier, il suit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{A^n \text{ appartient à } \mathrm{Vect}(A).}$

Exercice 3 (Edhec 2023)

Partie 1 : étude d'une loi de probabilité.

1. La fonction f est continue sur $]-\infty,1[$ et sur $[1,+\infty[$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 1. Elle est de plus positive sur $\mathbb{R}$ car $c>0$ par hypothèse. Considérons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}}\,\mathrm{d}x$ généralisée en $+\infty$. On reconnaît une intégrale de Riemann convergente ($c+1>1$ car $c>0$). De plus, pour tout $b>1$:
$$\int_1^b \frac{c}{x^{c+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x^c}\right]_{x=1}^{x=b} = \frac{-1}{b^c} + \frac{1}{1^c} = 1 - \frac{1}{b^c}$$
On obtient donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b^c}\right) = 1 \quad (\text{car } c>0)$$
Ainsi, $\boxed{f \text{ peut être considérée comme une densité de probabilité.}}$

2. X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^c}\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge puisque la fonction à intégrer est positive.

   On reconnaît une intégrale de Riemann convergente car $c>1$. Donc $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$. Soit $b>1$. Calculons :
$$\int_1^b \frac{c}{x^c}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-c}{(c-1)x^{c-1}}\right]_{x=1}^{x=b} = \frac{c}{c-1} - \frac{c}{(c-1)b^{c-1}}$$
Donc :
$$E(X) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{c}{c-1} - \frac{c}{(c-1)b^{c-1}}\right) = \boxed{\frac{c}{c-1}}.$$
X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c-1}}\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge puisque là aussi, la fonction intégrée est positive.

   Puisque $c>2$, l'exposant $c-1$ est strictement supérieur à 1, et cette intégrale de Riemann converge bien. Donc X admet un moment d'ordre 2, et par un calcul similaire au précédent :
$$E(X^2) = \frac{c}{c-2}.$$
Ainsi, $\boxed{X \text{ admet une variance}}$, et par la formule de Koenig-Huygens :
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2 = \frac{c(c-1)^2}{(c-2)(c-1)^2} - \frac{c^2(c-2)}{(c-2)(c-1)^2}$$
$$= \frac{c(c^2-2c+1)-(c^3-2c^2)}{(c-2)(c-1)^2} = \boxed{\frac{c}{(c-1)(c-1)^2}}.$$

3. Comme $X(\Omega) = [1;+\infty[$, on a pour tout $x<1$:
$$F(x) = P(X\leq x) = 0.$$
Prenons $x\geq 1$ et calculons :
$$F(x) = P(X\leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{c}{t^{c+1}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t^c}\right]_{t=1}^{t=x} = 1 - \frac{1}{x^c}.$$
Ainsi, $\boxed{F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<1, \\ 1-\dfrac{1}{x^c} & \text{si } x\geq 1. \end{cases}}$

4. (a) Puisque $X(\Omega) = [1, +\infty[$, la variable aléatoire $Y = \ln(X)$ est bien définie et $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. En particulier, $G(x) = 0$ pour tout $x < 0$. Prenons à présent $x \geq 0$ et calculons :

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) = P(\ln X \leq x) \\ &= P(X \leq e^x) \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante} \\ &= F(e^x) = 1 - \frac{1}{(e^x)^c} \quad \text{car } e^x \geq 1 \\ &= 1 - e^{-cx}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}}$$

(b) Ainsi, Y suit la $\boxed{\text{loi exponentielle de paramètre } c > 0.}$

(c) Puisque $Y = \ln(X)$, alors $X = e^Y$. On simule la variable aléatoire Y avec la commande `rd.exponential(1/c)` et on en déduit X en passant à l'exponentielle.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX(c):
    Y = rd.exponential(1/c)
    return np.exp(Y)
```

Partie 2 : produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c.

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c. On pose $Y_1 = \ln X_1, Y_2 = \ln X_2$ et $Z = X_1 X_2$.

5. On peut procéder ainsi :

```python
def simulz(c):
    X1 = simulX(c) ; X2 = simulX(c)
    return X1*X2
```

6. X_1 et X_2 admettent des espérances et sont indépendantes. Donc $Z = X_1 X_2$ admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) \quad \text{(par indépendance)} \\ &\underset{\text{quest. 2.}}{=} \frac{c}{c-1} \times \frac{c}{c-1} = \boxed{\frac{c^2}{(c-1)^2}} \end{aligned}$$

Concernant le moment d'ordre 2, puisque $Z^2 = X_1^2 X_2^2$ et que X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes par lemme de coalition et admettent toutes deux une espérance, Z admet un moment d'ordre 2 et :

$$E(Z^2) = E(X_1^2)E(X_2^2) = \frac{c}{c-2} \times \frac{c}{c-2} = \boxed{\frac{c^2}{(c-2)^2}}.$$

Par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Z) = \frac{c^2}{(c-2)^2} - \left(\frac{c^2}{(c-1)^2}\right)^2 = \frac{c^2(c-1)^4}{(c-2)^2(c-1)^4} - \frac{c^4(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4} = \frac{c^2 \times \left((c-1)^4 - c^2(c-2)^2\right)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

Or :

$$(c-1)^4 - c^2(c-2)^2 = c^4 - 4c^3 + 6c^2 - 4c + 1 - c^2(c^2 - 4c^2 + 4) = 2c^2 - 4c + 1.$$

On obtient bien :

$$\boxed{V(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}.}$$

7. (a) Par la partie précédente, Y_1 suit la loi $\mathscr{E}(c)$. D'après le cours, $\boxed{cY_1 \text{ suit donc la loi } \mathscr{E}(1) = \gamma(1).}$ Et il en est de même pour cY_2.

   (b) $cY_1 = c\ln(X_1)$ et $cY_2 = c\ln(X_2)$ sont indépendantes car X_1 et X_2 le sont (lemme de coalition). Par stabilité de la loi gamma, $\boxed{cY_1 + cY_2 \text{ suit la loi } \gamma(2).}$

8. (a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Y_1 + Y_2 \leq x) = P\left(cY_1 + cY_2 \leq cx\right) \quad \text{car } c > 0 \\ &= \boxed{K(cx)} \end{aligned}$$

Comme $cY_1 + cY_2$ suit la loi $\gamma(2)$, sa fonction de répartition K est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, et pour tout $x \neq 0$:

$$K'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-x} = \dfrac{1}{1!} x e^{-x} = x e^{-x} \text{ si } x > 0, \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

De la formule $H(x) = K(cx)$, on déduit donc :

- la fonction H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Donc $Y_1 + Y_2$ est bien une variable aléatoire à densité ;
- pour tout $x \neq 0$:

$$H'(x) = cK'(cx) \begin{cases} c^2 x e^{-cx} \text{ si } x > 0, \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases} = h(x).$$

La fonction h de l'énoncé est bien égale à H' en tout point où H est dérivable : c'est une $\boxed{\text{densité de } Y_1 + Y_2.}$

   (b) Puisque $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [1, +\infty[$, $Z(\Omega)$ est aussi égal à $[1, +\infty[$. En particulier, pour tout $x < 1$:

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = 0.$$

Soit $x \geq 1$. Calculons $F_Z(x)$ en remarquant que $Z = e^{Y_1} e^{Y_2} = e^{Y_1 + Y_2}$:

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) = P\left(e^{Y_1+Y_2} \leq x\right) \\ &= P(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x)) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante} \\ &= H\big(\ln(x)\big) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{F_Z : x \mapsto \begin{cases} H\big(\ln(x)\big) & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}}$$

Montrons que Z est une variable aléatoire à densité :

- F_Z est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$ (par composition, puisque ln continue sur $[1; +\infty[$ et H continue sur $\mathbb{R}$). Étudions la continuité à gauche en 1 :

$$\lim_{x \to 1^-} \underbrace{F_Z(x)}_{0} = 0 \quad \text{et} \quad F_Z(1) = H(0) = K(0) = 0.$$

  Donc F_Z est continue à gauche en 1. F_Z est donc continue sur $\mathbb{R}$.

- F_Z est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;1[$ et sur $]1,+\infty[$ (car ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$, à valeurs dans $]0;+\infty[$, et que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$).

Ainsi, Z est une variable aléatoire à densité.

Pour tout $x > 1$:

$$F_Z'(x) = \frac{1}{x} \times H'\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{x}c^2\ln(x)e^{-c\ln(x)} = \frac{1}{x}c^2\ln(x)\frac{1}{x^c} = \frac{c^2\ln(x)}{x^{c+1}} = f_Z(x)$$

et pour tout $x < 1$, $F_Z'(x) = 0 = f_Z(x)$. La fonction f_Z coïncide avec F_Z' en tout point où F_Z est dérivable : c'est une $\boxed{\text{densité de } Z}$

9. (a) La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^a}$ étant continue sur $[1;+\infty[$ (car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Soit $b > 1$, effectuons une intégration par parties sur le segment $[1,b]$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & \boxed{\ln(x)} & & \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \\ & & \searrow & \\ - & \frac{1}{x} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \boxed{\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}} \end{array}$$

Les fonctions encadrées étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,b]$, l'intégration par parties est licite, et donne :

$$\begin{aligned}
\int_1^b \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \times \ln(x)\right]_{x=1}^{x=b} - \int_1^b \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(b)}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{\ln(1)}{(\alpha-1)1^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(b)}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + 0 + \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_{x=1}^{x=b} \\
&= -\frac{\ln(b)}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2b^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

Comme $\alpha - 1 > 0$:

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)^2b^{\alpha-1}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{b\to+\infty} \frac{\ln(b)}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} = 0 \quad \text{(croissances comparées)}$$

Ceci prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ $\boxed{\text{converge}}$ et qu'elle vaut :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln(b)}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2b^{\alpha-1}}\right) = \boxed{\frac{1}{(\alpha-1)^2}}$$

(b) On calcule :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_Z(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} x \times \frac{c^2\ln(x)}{x^{c+1}}\,\mathrm{d}x = c^2\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c}\,\mathrm{d}x$$

D'après la question précédente (avec $\alpha = c$) on obtient :

$$E(Z) = \boxed{c^2 \times \frac{1}{(c-1)^2}.}$$

De même :

$$E(Z^2) = \int_1^{+\infty} x^2 \times \frac{c^2\ln(x)}{x^{c+1}}\,\mathrm{d}x = c^2\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c-1}}\,\mathrm{d}x = \boxed{c^2 \times \frac{1}{(c-2)^2}}$$

On retrouve bien les valeurs de $E(Z)$ et $E(Z^2)$ trouvées à la question 6., et donc la valeur de $V(Z)$ par la formule de Koenig-Huygens.