DS5

Devoir surveillé type parisiennes du 10/11/2023

Ce problème se compose de trois parties largement indépendantes, même si certains objets introduits dans la partie II se retrouvent dans la partie III. La partie I étudie un exemple de couple aléatoire suivant une loi trinomiale. La partie II étudie les lois marginales d'un tel couple. La partie III propose une caractérisation de la loi de Poisson.

Partie I.

On considère, dans cette partie des entiers naturels non nuls n, u, d, t et b, vérifiant $u+d+t=b$.
Une urne $\mathscr{U}$ contient b boules, parmi lesquelles u boules portent le numéro 1, d le numéro 2 et t le numéro 3.
Une expérience consiste en n tirages successifs d'une boule de l'urne $\mathscr{U}$ avec remise.
À chaque tirage, toutes les boules de l'urne $\mathscr{U}$ ont même probabilité d'être tirées.
Le modèle choisi pour cette expérience est l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ dans lequel l'univers Ω est l'ensemble $\{1,2,3\}^n$ des n-uplets d'éléments de l'ensemble $\{1,2,3\}$, et $\mathscr{T}$ est l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω, la probabilité P se déduisant naturellement des hypothèses qui ont été ou seront formulées.

Aucun tirage n'influe sur les autres en cela que, si une suite quelconque $(V_k)_{1\leq k\leq n}$ de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ est telle que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la valeur de V_k ne dépend que du résultat du k-ième tirage, alors les variables $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont mutuellement indépendantes.

On note U (respectivement D, T) la variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ dont la valeur est le nombre de boules numérotées 1 (respectivement 2, 3) tirées au cours de l'expérience.

1. Montrer que la variable aléatoire U suit une loi usuelle (à préciser), donner son espérance et sa variance. Donner, de même, les lois des variables aléatoires D et T, respectivement.

2. Les variables aléatoires U et D sont-elles indépendantes ? *Justifiez votre réponse.*

3. Déterminer, sans calcul, la loi de la variable aléatoire $U+D$, son espérance et sa variance.

4. En déduire que la covariance du couple (U,D) est égale à $-\dfrac{nud}{b^2}$.

5. *Simulation informatique.*

   On considère la fonction `Python` nommée `simulation` déclarée comme suit :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulation(n) :
      x = 0 ; y = 0 ; z = 0
      A = rd.randint(1,7,n)
      for k in range(n):
            r = A[k]
            if r == 1 :
                  x = x+1
            elif r<=3 :
                  y = y+1
            else :
                  z = z+1
      return np.array([x,y,z])
```

Que réalise l'instruction `simulation(12)` ?

On demande une réponse en rapport avec l'expérience précédemment étudiée et, en particulier, que soient précisées les valeurs des paramètres u, d, t et n dans la simulation proposée.

Dans toute la suite, m, i et j étant des entiers naturels, on note :

$$\binom{m}{i,j} = \begin{cases} \dfrac{m!}{i!j!(m-i-j)!} & \text{si } i+j \leq m \\ 0 & \text{si } i+j > m \end{cases}.$$

6. On considère deux entiers naturels k et ℓ vérifiant $k+\ell \leq n$.

   Soit $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément donné de Ω comportant exactement k « 1 » et ℓ « 2 ».

   Quelle est la probabilité $P\big(\{\omega\}\big)$ de l'événement élémentaire $\{\omega\}$?

   Dénombrer les n-uplets appartenant à l'ensemble Ω et comportant exactement k « 1 » et ℓ « 2 ».

   En déduire que la probabilité de l'événement $[U=k] \cap [D=\ell]$ est égale à :

$$\binom{n}{k,\ell} \frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}$$

   Ce résultat reste-t-il vrai si $k+\ell > n$?

Partie II : Lois marginales d'un couple aléatoire de loi trinomiale.

On considère, dans cette partie, un entier naturel n et l'ensemble I_n défini par

$$I_n = \{(k,\ell)/\ k \in [\![0,n]\!] \text{ et } \ell \in [\![0,n]\!] \text{ tels que } k+\ell \leq n\}.$$

Un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ étant donné, ainsi que trois réels strictement positifs p, q et r vérifiant $p+q+r=1$, on considère un couple aléatoire (X_n, Y_n) défini sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, à valeurs dans I_n, et tel que, pour tout couple $(k,\ell) \in I_n$:

$$P\big((X_n, Y_n) = (k,\ell)\big) = \binom{n}{k,\ell} p^k q^\ell r^{n-k-\ell}.$$

7. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{(k,\ell)\in I_n} \binom{n}{k,\ell} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} = 1.$

8. Montrer que les variables aléatoires X_n et Y_n suivent toutes deux une loi binomiale (en préciser les paramètres respectifs).

9. On se propose de calculer la covariance du couple (X_n, Y_n).

   (a) On suppose que $n \geq 2$. Prouver que, pour tout couple $(k,\ell) \in I_n$ vérifiant $k \geq 1$ et $\ell \geq 1$, on a :
   $$k\ell \binom{n}{k,\ell} = n(n-1)\binom{n-2}{k-1,\ell-1}.$$
   En déduire que $E(X_nY_n) = n(n-1)pq$.

   (b) Cette relation est-elle encore vraie si $n = 0$? si $n = 1$?

   (c) En déduire la valeur de la covariance $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$ du couple (X_n, Y_n).

10. Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

Partie III : Une caractérisation de la loi de Poisson.

Dans cette partie, la lettre n ne désigne plus un entier naturel fixé et on considère les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires définies, dans la partie précédente, pour chaque entier naturel n sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.
On rappelle que, pour tout entier naturel n, les variables aléatoires X_n et Y_n suivent des lois binomiales dont les paramètres ont été calculés en **II.8.**
On considère par ailleurs, une variable aléatoire N *non presque sûrement constante* définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et indépendante de tous les couples (X_n, Y_n), ce qui signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(i,j,k) \in \mathbb{N}^3$,

$$P\Big([(X_n, Y_n) = (i,j)] \cap [N = k]\Big) = P\Big((X_n, Y_n) = (i,j)\Big)P(N = k).$$

On définit les fonctions $X : \Omega \longmapsto \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \mapsto \mathbb{N}$ de la manière suivante : si N prend la valeur n, alors X (respectivement Y) prend la même valeur que X_n (respectivement Y_n).

A. Remarques générales.

11. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$[X = k] = \bigcup_{n=0}^{+\infty}\Big([X_n = k] \cap [N = n]\Big) = \bigcup_{n=k}^{+\infty}\Big([X_n = k] \cap [N = n]\Big)$$
En déduire que X est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.
On prouverait de même que Y est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires N et X_n, sont indépendantes.
On prouverait de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables $\mathbb{N}$ et Y_n sont indépendantes.

13. Déduire des résultats précédents que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} P(N=n).$$

Exprimer de même, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(Y=\ell)$ sous forme de somme d'une série.

14. Les variables aléatoires N et X sont-elles indépendantes ?

On considérera deux entiers a, et b vérifiant $0 \leq a < b$, $P(N=a) \neq 0$ et $P(N=b) \neq 0$, et on se préoccupera de l'événement $[N=a] \cap [X=b]$.

B. Si N suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

On considère un réel strictement positif λ. On suppose que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson de paramètre λ.

15. Montrer que X suit la loi de Poisson de paramètre λp et que Y suit la loi de Poisson de paramètre λq.

16. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

On commencera par justifier que, pour tout couple $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$,

$$P\Big([X=k] \cap [Y=\ell]\Big) = \sum_{n=k+\ell}^{+\infty} P\Big([X_n=k] \cap [Y_n=\ell]\Big) P(N=n)$$

C. Si X et Y sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson.

On ne suppose plus a priori *que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson.* On suppose maintenant que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

17. Montrer que, pour tout réel z appartenant à $[0,1]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n P(N=n)$ converge.

Dans toute la suite, si $z \in [0,1]$, la somme de cette série est notée $\Phi(z)$.

Un lemme de Fubini.

On **rappelle** le résultat suivant : soit $(r_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de réels *positifs* ou nuls.

On suppose que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum r_{i,j}$ converge ; on note $C_j = \sum_{i=0}^{+\infty} r_{i,j}$. On suppose de plus que la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} C_j$ converge.

Alors :

(i) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} r_{i,j}$ converge ; on note $L_i = \sum_{j=0}^{+\infty} r_{i,j}$ sa somme ;

(ii) La série $\sum_{i\in\mathbb{N}} L_i$ converge et $\sum_{i=0}^{+\infty} L_i = \sum_{j=0}^{+\infty} C_j$.

On définit en ce cas la somme $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} r_{i,j}$ comme étant le nombre $\sum_{i=0}^{+\infty}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} r_{i,j}\Big) = \sum_{j=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i=0}^{+\infty} r_{i,j}\Big)$.

18. On considère deux réels α et β appartenant tous deux à $[0,1]$. On définit sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ les variables aléatoires $A = \alpha^X$ et $B = \beta^Y$.

    (a) Montrer que les variables aléatoires A et B admettent une espérance (que l'on ne cherchera pas à évaluer).

    (b) Montrer que $0 \leq p\alpha + 1 - p \leq 1$ puis, en utilisant le lemme de Fubini, que

    $$E(A) = \varphi(p\alpha + 1 - p)$$

    On montrerait de même que $0 \leq q\beta + 1 - q \leq 1$ *et que* $E(B) = \Phi(q\beta + 1 - q)$.

19. On définit la variable aléatoire $C = AB = \alpha^X \beta^Y$.

    (a) Justifier que la variable aléatoire C admet une espérance (que l'on ne cherchera pas à évaluer).

    (b) Établir que $0 \leq p\alpha + q\beta + r \leq 1$, puis, en utilisant le théorème de transfert et le lemme de Fubini, que $E(C) = \Phi(p\alpha + q\beta + r)$.

20. Pour quelle raison peut-on affirmer que $E(AB) = E(A)E(B)$?

    En déduire que, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$,

    $$\Phi\Big(1 - p(1-\alpha) - q(1-\beta)\Big) = \Phi\Big(1 - p(1-\alpha)\Big)\Phi\Big(1 - q(1-\beta)\Big)$$

21. Montrer que, pour tout réel $z \in]0,1]$, $\Phi(z) > 0$. Que vaut $\varphi(1)$?

22. On définit l'application $\varphi : [0,1[\mapsto \mathbb{R}$ par la relation $\varphi(z) = \ln\Big(\Phi(1-z)\Big)$.

    (a) Montrer que, pour tous réels $a \in [0,p]$ et $b \in [0,q]$, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
    On pose dans toute la suite $\mu = \min(p.q)$ et $I = [0,\mu]$.

    (b) Calculer $\varphi(0)$.
    Montrer que, pour tout couple $(n,a) \in \mathbb{N} \times I$ vérifiant $0 \leq na \leq \mu$, on a : $\varphi(na) = n\varphi(a)$.

    (c) Montrer que, pour tout triplet $(n,m,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times I$ tel que $0 \leq \dfrac{n}{m}a \leq \mu$,

    $$\varphi\left(\frac{n}{m}a\right) = \frac{n}{m}\varphi(a)$$

    (d) Soit un couple $(x,a) \in \mathbb{R} \times I$ vérifiant $0 < xa < \mu$.
    Si r est un réel, on note $\lfloor r \rfloor$ la partie entière de r.
    Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \dfrac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.
    Montrer que la fonction φ décroît sur $[0,1[$. En déduire que $\varphi(xa) = x\varphi(a)$.

    (e) Montrer enfin qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = -\lambda x$.

23. On admet le résultat suivant :

    Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est telle que, pour tout* $z \in [1-\mu, 1]$, *la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n z^n$ *converge et est de somme nulle, alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

    Montrer que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson de paramètre λ.