DS2

Devoir surveillé du 06/10/2023

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Partie 1 : questions préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On pose :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$$

appelé *le commutant de la matrice* A, et

$$\mathbb{R}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[x]\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$.
3. Déterminer $\mathscr{C}(I_n)$ et $\mathbb{R}[I_n]$. Quelle est la dimension de ces sous-espaces vectoriels ?

Partie 2 : cas d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels strictement positifs et deux à deux distincts. Considérons :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

4. **Étude de $\mathscr{C}(D)$.**
   (a) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $M \times D$ et $D \times M$.
   (b) En déduire que M appartient à $\mathscr{C}(D)$ si, et seulement si, M est une matrice diagonale.
   (c) Déterminer $\dim(\mathscr{C}(D))$.
5. **Étude de $\mathbb{R}[D]$.**
   (a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$:
   $$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur P pour qu'il soit un polynôme annulateur de D.
   (c) Montrer que si P est un polynôme annulateur non nul de D, alors $\deg(P) \ge n$.
   (d) Montrer que $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[D]$.
   (e) En déduire que $\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D)$.
6. **Étude de $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^2 = D\}$.**
   (a) Soit $M \in \mathscr{R}$. Montrer que M appartient à $\mathscr{C}(D)$. En déduire qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$
   (b) Montrer que $\mathscr{R}$ est de cardinal 2^n, et déterminer les 2^n matrices M vérifiant $M^2 = D$.

Partie 3 : cas des matrices de taille 2×2

7. Déterminer $\max\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

8. On cherche à déterminer $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

   (a) Montrer que $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2$.

   (b) Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$.

      i. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.

      ii. Aboutir à une contradiction et conclure.

Exercice 2

Partie 1 : préliminaires (les trois questions sont indépendantes).

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

   (b) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leq u_n \leq 1$.

2. Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t$$

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t = 0$.

   (d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que : $\quad \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

3. On considère deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de somme respectives $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

   (a) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{2n} c_k$.

   (b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

   (c) Soit x un réel élément de $[0; 1[$. On suppose dans cette question que l'on a $a_k = \frac{x^k}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ et $b_k = x^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

      i. Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

      ii. Donner l'expression de c_n sous forme d'une somme.

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme d'une série

Dans cette partie on désigne toujours par x un réel $[0,1[$.

4. (a) Utiliser la troisième question du préliminaire pour établir que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right).$$
(b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

5. (a) Montrer que, pour tout réel u strictement positif, on a $\ln(u) \leq u$.
(b) En déduire que la série de terme général $(\ln(n))x^n$, avec $n \geq 1$, est convergente.

6. On pose : $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\ln(n))x^n$.
(a) Établir, en utilisant le résultat de la question 1.(c) que :
$$\frac{-\ln(1-x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$
(b) Montrer finalement l'équivalent suivant : $\displaystyle f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

7. (a) Étudier les variations de la fonction f.
(b) Dresser le tableau de variations de f (valeur en 0 et limite en 1^- comprises).

8. (a) En remarquant que $\displaystyle f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(\ln(n))x^n$, montrer que : $\displaystyle 0 \leq f(x) \leq \frac{x}{(1-x)^2} - x$.
(b) En déduire que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite 0. Donner la valeur du nombre dérivée à droite en 0 de f.

Exercice 3

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$.

On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ème l'autre côté.

De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

On définit de même les séries suivantes.

Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ème lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : étude des longueurs de séries

1. On note L_1 la longueur de la première série.

   Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+1$. En déduire que : $P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$.

   Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1$.

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.

(a) Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+k+1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.

(b) En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$.

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$.

(c) Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

Partie 2 : probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

3. Montrer que pour tout réel x, on a $1 - x \leq e^{-x}$.

4. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq k$, on note : $\displaystyle C_n = \bigcup_{k\leq i\leq n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n$.

   (a) Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$.

   (b) Montrer que $\displaystyle P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$, puis, en utilisant la question 3., que :

   $$P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).$$

   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1$.

   (c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right)$?

   (d) Justifier que : $\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

   En déduire que $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

5. En considérant les évènements A_n « on obtient Pile au $(2n)$-ème et au $(2n+1)$-ème lancers », montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.