DS7

Correction du concours blanc 1 type Maths 1 (HEC 2022)

Partie I - Premières propriétés

Section A - Étude des sous-espaces $E_u(e)$

1. $\mathcal{B}(e,n+1)=(e,u(e),u^2(e),\dots,u^{n+1-1}(e))$ famille de $n+1$ vecteurs.

   Et comme $\dim(E)=n$, $\boxed{\text{cette famille est liée}}$

2. Comme $\dim(E)=n$, le cardinal maximal d'une famille libre de E est n.

   $\mathcal{B}(e,k)$ comprends k vecteurs.

   Donc$\{k\in\mathbb{N}^*\mid\mathcal{B}(e,k)\ \text{ est libre }\}$, ensemble d'entiers, est non vide (1 en est élément car $e\neq 0$) et majoré par n, donc il a un maximum.

   $\boxed{\text{et } d(e)=\max\{k\in\mathbb{N}^*\mid\mathcal{B}(e,k)\ \text{ est libre }\}\text{ existe}}$

3. Par définition de $d(e)$, $\mathcal{B}(e,d(e)+1)=\left(e,u(e),u^2(e),\dots,u^{d(e)}(e)\right)$ est liée. Il existe donc $(b_0,\dots,b_{d(e)})\neq(0,\dots,0)$ tel que :

   $$b_0e+b_1u(e)+\cdots+b_{d(e)-1}u^{d(e)-1}(e)+b_{d(e)}u^{d(e)}(e)=0_E.$$

   Supposons $b_{d(e)}\neq 0$. Alors :

   $$b_0e+b_1u(e)+\cdots+b_{d(e)-1}u^{d(e)-1}(e)=0_E$$

   et par liberté de la famille $\left(e,u(e),u^2(e),\dots,u^{d(e)-1}(e)\right)$, $(b_0,\dots,b_{d(e)-1})$ serait nul, ce qui est impossible car $(b_0,\dots,b_{d(e)})\neq(0,\dots,0)$. Ainsi, $b_{d(e)}\neq 0$, et quitte à diviser par $b_{d(e)}$, on obtient :

   $$u^{d(e)}(e)=-\frac{1}{b_{d(e)}}\left(b_0e+b_1u(e)+\cdots+b_{d(e)-1}u^{d(e)-1}(e)\right).$$

   Ainsi $u^{d(e)}(e)$ est combinaison linéaire des précédents.

   Donc, $\boxed{\text{il existe des scalaires } a_0,a_1,\dots,a_{d(e)-1} \text{ tels que :}\quad u^{d(e)}(e)=\sum_{i=0}^{d(e)-1}a_iu^i(e)}$

   Par récurrence, montrons que, pour tout $k\geq d(e)$, $u^k(e)$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}(e,d(e))$. $\geq d(e)$

   C'est vrai pour $k=d(e)$.

   Soit $k\geq d(e)$ pour lequel il existe des scalaires $a_0,\cdots,a_{d(e)-1}$ tels que $u^k(e)=\sum_{i=0}^{d(e)-1}a_iu^i(e)$.

   Alors $u^{k+1}(e)=u\left(u^k(e)\right)=\sum_{i=0}^{d(e)-1}a_iu^{i+1}(e)=\sum_{j=0}^{d(e)-1}a_{j-1}u^j(e)+a_{d(e)-1}u^{d(e)}(u)$

   Et comme $u^{d(e)}(u)$ est lui même combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}(e,d(e))$, c'est également le cas pour $u^{k+1}(e)$.

   Donc, $\boxed{\forall k\geq d(e),\ u^k(e) \text{ est combinaison linéaire des vecteurs de } \left(e,u(e),u^2(e),\dots,u^{d(e)-1}(e)\right)}$

$E_u(e) = E_u(e) = \text{vect}\left(u^k(e) \mid k \in [[0, n-1]]\right)$ et $d(e) \leqslant n$ donc la famille $\mathcal{B}(e, d(e))$ est une famille de vecteurs de $E_u(e)$.

Tous les vecteurs de la famille génératrice de $E_u(e)$ sont combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}(e, d(e))$.

Donc $\mathcal{B}(e, d(e))$. est une famille génératrice de $E_u(e)$.

Enfin, par définition de $d(e)$, cette famille est libre.

Donc $\boxed{\mathcal{B}(e, d(e)) \text{ est une base de } E_u(e).}$

4. Soit $x \in E_u(e) = \text{Vect}\left(\left(u^k(e)\right)_{k\in[[0,d(e)-1]]}\right)$ d'après la question 3.

   Donc, par linéarité de u, $u(x) \in \text{Vect}\left(\left(u^{k+1}(e)\right)_{k\in[[0,d(e)-1]]}\right) = \text{Vect}\left(u^k(e)_{k\in[[1,d(e)-1]]}, u^{d(e)}(u)\right)$

   Et comme d'après 3. $u^{d(e)}(e)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{B}(e, d(e))$, $u(x)$ l'est également.

   Donc $u(x) \in E_u(e)$ et $\boxed{E_u(e) \text{ est stable par l'endomorphisme } u.}$

   Soit F stable par u, contenant e, alors, par récurrence immédiate, pour tout $k \in [[0, d(e) - 1]]$, $u^k(e) \in F$, donc, par stabilité de F par combinaison linéaire, $E = \text{Vect}(\mathcal{B}(e, d(e))) \subset F$.

   Donc $\boxed{E_u(e) \subset F}$

5. Si e est vecteur propre alors$e$ est non nul donc (e) est libre

   et $u(e)$ est proportionnel à e donc $(e, u(e))$. Donc $d(e) = 1$.

   Réciproquement, si $d(e) = 1$ alors (e) est libre donc $e \neq 0$ et $(e, u(e))$ est liée, et comme $e \neq 0$, $u(e)$ est propotionnel à e, donc e est vecteur propre.

   Finalement, $\boxed{e \text{ est vecteur propre} \Longleftrightarrow d(e) = 1}$

6. Si u est une homotétie de rapport λ alors, pour tout $e \in E$: $u(e) = \lambda e$ donc tout vecteur non nul de E est vecteur propre et $d(e) = 1$.

   Réciproquement ,si, pour tout vecteur non nul de E. $d(e) = 1$, alors, tout vecteur non nul de E est vecteur propre.

   Montrons, par l'absurde, que la valeur propre est la même pour tous les vecteurs de E.

   Soient x et y vecteurs propres associés à λ et μ distincts alors (x, y) est libre.

   Donc $x + y$ est non nul.

   Il est donc (hypothèse de cette question) lui même associé à un scalaire ν.

   Donc, $u(x + y) = \nu(x + y)$ et par linéarité de u, $u(x + y) = \lambda x + \mu y$.

   La famille (x, y) étant libre , par unicité de la déconposition $\nu = \lambda$ et $\nu = \mu$ donc $\lambda = \mu$, absurde.

   Donc tous les vecteurs non nuls de E sont associés à une même valeur propre et $\boxed{u \text{ est une homotétie.}}$

7. u est un endomorphisme cyclique signifie qu'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Si il existe un vecteur non nul de E tel que $d(e) = n$ alors d'après la question 3. $\mathcal{B}(e, d(e)) = \mathcal{B}(e, n)$ est une base de $E_u(e)$.

   Or $\mathcal{B}(e, n)$ est une famille de n vecteurs donc $\dim(E_u(e)) = n$.

   De plus $E_u(e) \subset E$. Donc $E_u(e) = E$ et $\underline{u \text{ est un endomorphisme cyclique.}}$

   $\boxed{\Rightarrow}$ Si u est cyclique, alors il existe $e \in E$ tel que $E_u(e) = E$ et $\dim(E_u(e)) = n$ donc la base $\mathcal{B}(e, d(e))$ de $E_u(e)$ doit contenir n vecteurs.

   donc $\underline{d(e) = n.}$ Et

   $\boxed{u \text{ est cyclique si et seulement s'il existe un vecteur non nul de } E \text{ tel que } d(e) = n}$

Section B - Premières propriétés des endomorphismes cycliques

8. Comme u est cyclique, $d(e) = n$ et $\mathcal{B}(e,n)$ est bien une base de $E = E_u(e)$.

   $\mathcal{B}(e,n) = \left(u^k(e)\right)_{k\in[[0,n-1]]}$.

   Pour tout $k \in [[0, n-2]]$: $u^k(e)$ est le $k+1^{ème}$ vecteur de la base.

   $u\left(u^k(e)\right) = u^{k+1}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i u^i(e)$ avec $x_i = 0$ si $i \neq k+1$ et 1 si $i = k+1$, d'où ses coordonnées $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots 0)$ avec le 1 en $k+2^{ème}$ position.

   et $u\left(u^{n-1}(e)\right) = u^n(e) \in E$ donc est combinaison linéaire des vecteurs de la base. Donc il existe $(a_k)_{k\in[[0,n-1]]}$ coordonnées de $u^n(e)$ dans la base $B(e,n)$.

   $\boxed{\text{Donc } A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u) \text{ est une matrice de Frobenius.}}$

9. $(P_A(u))(e) = u^n(e) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e)$.

   Les $(a_k)_{k\in[[0,n-1]]}$ étant les coordonnées de $u^n(e)$ sur la base $\left(u^k(e)\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ on a donc $\boxed{(P_A(u))(e) = 0}$

   Pour $k \in [[1, n-1]]$: comme polynôme en u, $P_A(u)$ et u^k comutent donc

   $$(P_A(u))\left(u^k(e)\right) = \left(P_A(u) \circ u^k\right)(e) = \left(u^k \circ P_A(u)\right)(e) = u^k\left(P_A(u)(e)\right) = u^k(0) = 0$$

   par linéarité de u.

   Donc $(P_A(u))$ est nul sur la base $\mathcal{B}(e,n)$,.donc $P_A(u) = 0$ et $\boxed{P_A \text{ est un polynôme annulateur de } u.}$

10. Soit $(\alpha_k)_{k\in[[0,n-1]]}$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k = 0$ alors $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(e) = 0$.

    Et comme $\left(u^k(e)\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ est libre (dans E), pour tout k, $a_k = 0$.

    Donc $\boxed{\text{la famille } (\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1}) \text{ est libre dans } \mathcal{L}(E).}$

11. P_A est un polynôme annulateur de u.

    <u>P_A est non nul</u> car son terme dominant est X^n.

    Si un $P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ avec $d < n$ est un polynôme annulateur de u alors $\sum_{k=0}^{d} \alpha_k u^k(e) = 0$ et comme la famille $\left(u^k(e)\right)_{k\in[[0,d]]}$, sous famille de $\left(u^k(e)\right)_{k\in[[0,n-1]]}$, est libre alors tous les coefficients sont nuls, donc P est nul.

    Donc l<u>e degré minimum d'un polynôme annulateur non nul est supérieur ou égal à n</u>

    <u>P_A est, lui, de degré n.</u>

    Et $\boxed{P_A \text{ est un polynôme annulateur non nul de } u \text{ de degré minimal.}}$

12. $\boxed{\Rightarrow}$Par théorème, avec P_A annulateur de u, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P_A\}$

    $\boxed{\Leftarrow}$Si λ est racine de P_A alors P_A est divisible par $X - \lambda$ et il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul, tel que $P = (X - \lambda) Q$

    Si λ n'est pas valeur propre alors $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est bijective.

    On a donc $0 = P_A(u) = (X - \lambda) Q(u) = (u - \lambda\,\mathrm{id}) \circ Q(u)$ donc $Q(u) = (u - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} \circ 0 = 0$

    Et Q est un polynôme annulateur de u, non nul, de degré $n-1$ ce qui est contraditoire avec 11.

    Donc λ est valeur propre de u.

    $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } u \text{ si et seulement si } \lambda \text{ est racine de } P_A}$

    Le sous espace propre de u associé à la valeur propre λ est de même dimension que celui de sa matrice A.

Or $A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$

Les $n-1$ colonnes étant échelonnées, $\operatorname{rg}(A-\lambda I) \geq n-1$ donc par le théorème du rang, $\dim(\ker((A-\lambda I))) \leq 1$.

Donc, si λ est valeur propre de u, donc de A, $1 \leq \dim(\ker((A-\lambda I))) \leq 1$ et

les sous espaces propres de u sont tous de dimension 1.

13. P_A est un polynôme de degré n.

    D'après le 12., les sous espaces propres de u sont de dimension 1.

    u est diagonalisable, si et seulement si la somme des dimensions des sous espaces propres est n.

    Donc u diagonalisable si et seulement si u a n valeurs propres distinctes.

    Donc $\boxed{u\text{, cyclique, diagonalisable si et seulement si } P \text{ a } n \text{ racines distinctes dans } \mathbb{R}.}$

Section C - Un premier exemple

14. F est symétrique réelle donc diagonalisable.

    Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

15. Soit $V=(x,y,z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} V \in \ker(f-\lambda\,\mathrm{id}) &\iff (f-\lambda\,\mathrm{id})(V)=0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\lambda x + z = 0 \\ -\lambda y - z = 0 \\ x - y - (1+\lambda) z = 0 \end{cases} \\ &\iff (1) \begin{cases} z = \lambda x \\ -\lambda(y+x) = 0 \\ (1-(1+\lambda)\lambda)x - y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

<u>Si $\lambda = 0$:</u> (1) $\iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$ et les solutions sont $\ker(f - 0\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}((1,1,0)) \neq \{0\}$ donc 0 est valeur propre associé à $E_0 = \operatorname{Vect}((1,1,0))$.

<u>Si $\lambda \neq 0$:</u> (1) $\iff$ (2) $\begin{cases} z = \lambda x \\ y = -x \\ (2-(1+\lambda)\lambda)x = 0 \end{cases}$ avec $(\cdots) = -\lambda^2 - \lambda + 2$ qui a pour racines 1 et -2.

<u>Si $\lambda = 1 \neq 0$:</u> (2) $\iff \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}$ et $\ker(f - 1\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}((1,-1,1)) \neq \{0\}$ donc 1 est valeur propre associé à $E_1 = \operatorname{Vect}((1,-1,1))$

<u>Si $\lambda = -2 \neq 0$:</u> (2) $\iff \begin{cases} z = -2x \\ y = -x \end{cases}$ et $\ker(f - 1\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}((1,-1,-2)) \neq \{0\}$ donc -2 est valeur propre associé à $E_{-2} = \operatorname{Vect}((1,-1,-2))$

f ayant trois valeurs propres distinctes et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, la juxtaposition d'un vecteur propre associé à chaque valeur propre forme une base de vecteurs propres.

Avec l'ordre croissant des valeurs propres demandé, $\boxed{V_1 = (1,-1,-2)\,,\ V_2 = (1,1,0) \text{ et } V_3 = (1,-1,1)}$ dont les premières coordonnées dans la base canonique est bien 1.

Variante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc, avec $V_1 = (1,-1,-2) \neq 0$, $f(V_1) = -2V_1$ donc -2 est valeur propre de f et V_1 est un vecteur propre associé dont la première coordonnée est 1.

De même, avec $V_2 = (1,1,0) \neq 0,\ f(V_2) = 0V_2$ et 0 est valeur propre et

avec $V_3 = (1,-1,1) \neq 0,\ f(V_3) = 1V_3$.

Donc $-2, 0$, et 1 sont des valeurs propres distinctes de f, qui en a au plus 3, ce sont donc les valeur propres de f.

Comme elles sont distinctes, la juxtaposition (V_1, V_2, V_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

16. $V = V_1 + V_2 + V_3$, $d(V)$ est calculé ici pour $u = f$.

$f(V) = f(V_1) + f(V_2) + f(V_3)$ par linéarité de f et

$f(V) = -2V_1 + V_3$

$f^2(V) = 4V_1 + V_3$

Soit $\mathcal{C} = (V_1, V_2, V_3)$ base de $\mathbb{R}^3$, par Gauss,

$\operatorname{rg}\left(V, f(V), f^2(V)\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\left\{\begin{array}{l} C_2 + 2C_1 \to C_2 \\ C_3 - 4C_1 \to C_3 \end{array}\right.$

$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ avec $C_3 + C_2 \to C_3$

$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$

Donc la famille $\left(V, f(V), f^2(V)\right)$ est libre et, par définition de $d(V) \geq 3$. Et comme $d(V) \leq 3$ 'après 2., $\boxed{d(V) = 3}$

Donc d'après 7. avec $V \neq 0$, $\boxed{f \text{ est cyclique.}}$

17. Les polynômes annulateurs de g ou de G sont les m̂mes.

$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2G$

Donc $X^2 - 2X$ est annulateur de G

Comme G et I ne sont pas proportionnelles, il n'y a pas de polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 1.

Donc, $\boxed{X^2 - 2X \text{ est annulateur de degré minimal.}}$

Or, d'après la question 11., si u est un endomorphisme cyclique, $P_{A,}$qui est de degré $n = 3$, est annulateur de degré minimal.

Comme ici, le degré minimal d'un polynôme annulateur est 2, $\boxed{g \text{ n'est pas cyclique.}}$

18. $V_1 = (1,-1,-2)$, $V_2 = (1,1,0)$ et $V_3 = (1,-1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } g(V_1) = 2V_1$$

et de même , $g(V_2) = 0V_2$ et $g(V_3) = 2V_3$

et ces vecteurs sont non nuls donc vecteurs propres de g.

Donc $\boxed{(V_1, V_2, V_3) \text{ est une base de vecteurs propres de } g \text{ associés à } 2,\ 0 \text{ et } 2}$

Section D - Avec Python

19. Si $P(x_k)P(x_{k+1}) < 0$, alors $P(x_k)$ et $P(x_{k+1})$ sont de signe strictment distinct.

P étant continue sur $[x_k, x_{k+1}]$ avec 0 compris entre $P(x_k)$ et $P(x_{k+1})$, P a au moins une racine dans l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ (théorème des valeurs intermédiaires)

Les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ pour $k \in [[1, n]]$ étant disjoints,P a donc au moins n racines distinctes.

Et comme $\deg(P) = n$, il en a au plus n.

Donc, $\boxed{\text{dans ces conditions, } P \text{ possède } n \text{ racines distinctes.}}$

20. Si z est un réel tel que $P(z) = 0$ alors

ou bien $|z| \leq 1$ alors $|z| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$

ou bien $|z| > 1$ et $z^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ et, comme $z \neq 0$: $z = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-(n-1)}$

Donc $|z| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n+1}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \left|z^{k-n+1}\right|$ par inégalité triangulaire.

Comme $k - n + 1 \leq 0$ alors $|z|^{k-n+1} \leq 1$ pour tout $k \in [[0, n-1]]$, et $|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$

Donc, $\boxed{\text{si } z \text{ est un réel tel que } P(z) = 0, \text{ alors } |z| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)}$

21. Avec un compteur `c`, on compte le nombre de changement de signe :

```python
def racSimpApprox(coeff,pas):
    n = np.shape(coeff)[0] #deg du poly
    p = np.ones(n+1)
    p[0:n] = -coeff #on réajuste les coeff de P
    c = 0 #compteur de chgts de signe
    m = np.max(np.array([np.sum(np.abs(p)),1]))
    x = -m-pas/2
    while x<=m+pas/2 :
        if nppol.polyval(x,p)*nppol.polyval(x+pas,p)<0 :
            c = c+1
        x = x+pas
    if c == n :
        val = True
    else :
        val = "ind"
    return val
```

22. La fonction renvoie "ind" lorsqu'elle n'a pas détecté n changements de signe avec CE pas.

Cela peut être dû au fait qu'il n'y a pas n racines réelles, ou bien au fait qu'il y a plusieurs racines réelles distinctes dans un même pas.

Si `racSimpApprox` renvoie Vrai, alors le polynôme P a n racines réelles dstinctes, donc A est diagonalisable.

Partie II - Étude de deux cas particuliers

Section A - Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques

23. Les endomorphismes $u - \lambda_i \operatorname{id}_E$ commutent.

    Donc, pour un vecteur propre V_i associé à la valeur propre λ_i,

    $(u - \lambda_1 \operatorname{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \operatorname{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_p \operatorname{id}_E) = (u - \lambda_1 \operatorname{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \operatorname{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_p \operatorname{id}_E) \circ (u - \lambda_i \operatorname{id}_E)(V_i) = 0$

    u est diagonalisable, donc il y a une base de vecteurs propres.

    Et, sur cette base de vecteurs propres, cet endomorphisme s'annule.

    $\boxed{\text{Donc cet endomorphisme est nul.}}$

24. En développant cette composée, on obtient un polynome en u de degré p, qui est donc une combinaison linéaire nulle de $(\operatorname{id}_E, u, u^2, \ldots, u^p)$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls. (celui de u^p est $1 \neq 0$)

    $\boxed{\text{Donc la famille } (\operatorname{id}_E, u, u^2, \ldots, u^p) \text{ est liée}}$

25. Si u est cyclique, et diagonalisable, d'après la question 13, il a n valeurs prorpes distinctes.

    Donc $\boxed{p = n}$

26. $\mathcal{B}(e, n) = \left(u^k(e)\right)_{k \in [[0, n-1]]} = \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i)^k e_i\right)_{k \in [[0, n-1]]}$ par linéarité de u^k pour tout k.

    Soit $(\alpha_k)_{k \in [[0, n-1]]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(e) = 0$ alors $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k\right) e_i = 0$

    Donc, ((e_i) famille libre) pour tout i, $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k = 0$ et le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ de degré au plus $n-1$, a n racines $(\lambda_i)_{i \in [[1, n]]}$ distinctes.

    Il est donc nul, et pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $\alpha_k = 0$.

    Donc $\mathcal{B}(e, n)$ est libre de n vecteurs, donc eEst une base de E et $E(e, d(e)) = E$ donc $\boxed{u \text{ est cyclique.}}$

27. On avait montré au I.C. que V_1, V_2, V_3 étaient base de vecteurs propres de f (associés à -2,0, et 1)et de g (associés à 2,0 et 2)

    Donc, $u_\alpha(V_1) = (g + \alpha f)(V_1) = (2 - 2\alpha) V_1$

    $u_\alpha(V_2) = (g + \alpha f)(V_2) = (0 + 0\alpha) V_2 = 0 V_2$ et

    $u_\alpha(V_3) = (g + \alpha f)(V_3) = (2 + 1\alpha) V_3$

    Donc (V_1, V_2, V_3) est également base de vecteurs propres pour $\boxed{u_\alpha \text{ qui est donc diagonalisable.}}$

    D'après 25. et 26., un endomorphisme u diagonalisable est cyclique si et seulement si il a n valeurs propres distinctes.

    Donc, ici, si $2 - 2\alpha \neq 0$, $2 - 2\alpha \neq 2 + \alpha$ et $2 + \alpha \neq 0$

    $2 - 2\alpha \neq 0 \iff \alpha \neq 1$

    $2 - 2\alpha \neq 2 + \alpha \iff \alpha \neq 0$

    $2 + \alpha \neq 0 \iff \alpha \neq -2$

    Et $\boxed{u_\alpha \text{ est cyclique } \iff \alpha \notin \{-2, 0, 1\}}$

Section B - Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques

28. Soit $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i u^i(e) = 0$

    Par l'absurde : Si les α_i ne sont pas tous nuls, soit $j = \{i \in [[0, r-1]] \ / \ \alpha_i \neq 0\}$

alors $\sum_{i=j}^{r-1} \alpha_i u^i(e) = 0$ et

$$\begin{aligned} 0 &= u^{r-j-1}\left(\sum_{i=j}^{r-1} \alpha_i u^i(e)\right) \\ &= u^{r-j-1}\left(u^j(e)\right) + \sum_{i=j+1}^{r-1} \alpha_i u^{\overbrace{r+i-j-1}^{\geq \mathrm{r}}}(e) \\ &= u^{r-1}(e) + \sum_{i=j+1}^{r-1} \alpha_i 0 \end{aligned}$$

car u est nilpotente d'indice r. Ce qui contredit $u^{r-1}(e) \neq 0$.

Donc, pour tous les α_i sont nuls et $\boxed{\text{la famille } (e, u(e), \ldots, u^{r-1}(e)) \text{ est libre dans } E.}$

29. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace vectoriel donc $\boxed{r \leq n}$

    Si $r = n$, alors, pour ce $e \neq 0$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$, d'après la quetion précédente, $d(e) = n$ donc u est cyclique.

    Réciproquement, si u est cyclique, il existe $e \neq 0$ tel que $d(e) = n$ donc tel que $\left(u^k(e)\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ soit libre.

    Et pour ce e, $u^{n-1}(e) \neq 0$, donc l'indice de nilpotence $r \geq n$, et comme $r \leq n$, on a bien $r = n$.

    Finalement, $\boxed{\text{l'indice de nilpotence } r = n \text{ si et seulement si } u \text{ est cyclique.}}$

    Dans ce cas, la matrice dans la base $\mathcal{B}(e, n)$ est une matrice de Frobenius avec $u\left(u^{n-1}(e)\right) = 0$, donc la dernière colonne nulle :

    $$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Section C - Un second exemple

30. Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{k+1-1} \mathrm{e}^{-t} dt$ converge et vaut $\Gamma(k+1) = k!$

    Pour $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$, en développant les $(x+t)^k et$ en regroupant suivant les puissances de t, il existe des fonctions polynômes P_k de degré inférieur ou égal à $n-1$, telles que $P(x+t) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) t^k$ pour tout t et x réels.

    Donc, par linéarité d'intégrales convergentes,

    $\boxed{\int_0^{+\infty} P(x+t) \mathrm{e}^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) t^k \mathrm{e}^{-t} dt \ \text{ converge}}$ et vaut $\sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) k!$

    Donc $\boxed{x \mapsto \int_0^{+\infty} P(x+t) \mathrm{e}^{-t} dt \text{ est bien une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à } n-1, \text{ dans } E}$

31. D'après la question précédente, u est une application de E dans E.

    Et avec P et Q de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(x+t) \mathrm{e}^{-t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} P(x+t) \mathrm{e}^{-t} dt + \int_0^{+\infty} Q(x+t) \mathrm{e}^{-t} dt$ par linéarité d'intégrales convergentes.

    Donc $u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)$ et u est bien linéaire.

    $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E.}$

32. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A > 0$: $u(P)(x) = \int_0^{+\infty} P(x+t) \mathrm{e}^{-t} dt$

    avec f et g de classe C^1 sur $[0, A]$:

$f(t) = P(x+t) : f'(t) = P'(x+t)$
$g'(t) = e^{-t} : g(t) = -e^{-t}$
on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}dt &= \left[-P(x+t)\,e^{-t}\right]_{t=0}^{A} + \int_0^A P'(x+t)\,e^{-t}dt \\ &= -P(x+A)\,e^{-A} + P(x)\,e^{0} + \int_0^A P'(x+t)\,e^{-t}dt\end{aligned}$$

et,$P(x+A) = \mathrm{o}\left(e^A\right)$ donc $P(x+A)\,e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$
Comme P' est polynômiale, d'après 33. $\int_0^{+\infty} P'(x+t)\,e^{-t}dt$ converge et vaut $u(P')(x)$
donc $\int_0^A P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}dt \underset{A\to+\infty}{\to} P(x) + u(P')(x)$ et

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)}$

33. On montre par récurrence, que, pour tout $m \in \mathbb{N} : u(P) = \sum_{k=0}^{m} P^{(k)} + u\left(P^{(m+1)}\right)$

    Pour $m = 0 : \sum_{k=0}^{0} P^{(k)} + u\left(P^{(0+1)}\right) = P + u(P') = u(P)$ d'après 35.

    Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $u(P) = \sum_{k=0}^{m} P^{(k)} + u\left(P^{(m+1)}\right)$ alors

    $P^{(m+1)} \in E$ donc d'après 35., $u\left(P^{(m+1)}\right) = P^{(m+1)} + u\left(P^{(m+1)\prime}\right)$

    et $u(P) = \sum_{k=0}^{m} P^{(k)} + P^{(m+1)} + u\left(P^{(m+2)}\right) = \sum_{k=0}^{m+1} P^{(k)} + u\left(P^{(m+2)}\right)$

    Donc, la propriété est bien vraie pour tout m entier et en particulier pour $m = n-1$ pour lequel $P^{(n)} = 0$ car P est de degré inférieur ou égal à $n-1$.

    et, comme $u(0) = 0$ par linéarité de u, il ne reste que $\boxed{u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}}$

34. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}dt$ converge, par changement de variable affine $t = s - x$, $\int_x^{+\infty} P(s)\,\mathrm{e}^{-(s-x)}dt$ converge et est égal à $\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}dt$.

    Et par linéarité d'intégrales convergentes, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad u(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s}ds}$

35. Pour tout $x \in \mathbb{R} : \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s}ds = \int_0^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s}ds - \int_0^{x} P(s)\mathrm{e}^{-s}ds$
    Avec $f : s \mapsto P(s)\,e^{-s}$ continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x P(s)\mathrm{e}^{-s}ds$ est la primitive de f (qui s'annule en 0)
    Donc $x \mapsto \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s}ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto -P(x)\,e^{-x}$
    $u(P) : x \mapsto \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s}ds$ donc, par produit, $\boxed{u(P) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$

    $$\begin{aligned}u(P)'(x) &= e^x \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s}ds + e^x \times -P(x)\,e^{-x} \\ &= u(P)(x) - P(x)\end{aligned}$$

    et $\boxed{(u(P))' = u(P) - P}$
    On avait vu à 35. que $u(P) = P(x) + u(P')$
    on donc bien , $\boxed{(u(P))' = u(P')}$.

36. Pour tout $k \in [[0, n-1]]$, et $x, t \in \mathbb{R}$
    $(x+t)^k = \sum \binom{k}{i} t^{k-i} x^i$ et

    $$u\left(X^k\right)(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i \int_0^{+\infty} t^{k-i} e^{-t}dt = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (k-i)!x^i = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x^i$$

donc $u\left(X^k\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}X^i$ donc la matrice de u dans la base $\mathcal{C}=\left(X^k\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ est nulle sous la diagonale et a pour termes diagonaux $\frac{k!}{k!}=1$

et $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u)=\begin{pmatrix}1 & 1!/0! & \cdots & (n-1)!/0! \\ 0 & 1 & & (n-1)!/1! \\ \vdots & (0) & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ matrice triangulaire et } \mathrm{Sp}(u)=\{1\}}$

37. $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u-\mathrm{id})=\begin{pmatrix}0 & 1!/0! & \cdots & (n-1)!/0! \\ 0 & 0 & & (n-1)!/1! \\ \vdots & (0) & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$ est échelonnée à partir de la seconde colonne.

    donc $\mathrm{rg}(v)=n-1$.

    D'autre part, les images par v des vecteurs de la base canonique sont tous de degré $\leq n-2$.

    Donc $\mathrm{Im}(v)\subset\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\dim(\mathrm{Im}(v))=\dim\mathbb{R}_{n-2}[X]$ d'où $\mathrm{Im}(v)=\mathbb{R}_{n-2}[X]$

    Donc $\boxed{\mathrm{Im}(v) \text{ est l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à } n-2.}$

38. Pour tout $1\leq k\leq n-1$, on a $\deg\left(v\left(X^k\right)\right)=k-1$.

    Donc, par récurrence avec orédécesseurs, $\deg\left(v^k\left(X^k\right)\right)=0$ et $v^{k+1}\left(X^k\right)=0$.

    De plus $n\geq k+1$, donc $v^n\left(X^k\right)=0$, sur la base de $\left(X^k\right)_{k\in[[0,n-1]]}$, et $v^n=0$ (par linéarité de v^n)

    $\boxed{\text{Donc } v \text{ est bien nilpotente.}}$

    Et comme $\deg\left(v^{n-1}\left(X^{n-1}\right)\right)=0$, $v^{n-1}\left(X^{n-1}\right)\neq 0$ donc $v^{n-1}\neq 0$ et $\boxed{v \text{ est nilpotente d'indice } n}$

    D'après la question 28. $\boxed{v \text{ est alors cyclique}}$.

Partie III - Décomposition de Frobenius et applications

Section A - Cas d'une homothétie

39. Si u est une homotétie de rapport λ, avec $p=n$, $(v_i)_{i\in[[1,n]]}$ une base de E et $F_i=\mathrm{Vect}(v_i)$ on a $u(v_i)=\lambda v_i$ donc $\mathrm{Vect}(v_i)$ est stable par u et pour tout i, F_i est stable par u.

    Comme, pour tout i, (v_i) est une base de F_i et que la juxtaposition des bases des F_i forme une base de E, alors les F_i sont supplémentaires dans E.

    Pour tout i, $\left(v_i,u_{|F_i}(v_i)\right)$ est lié donc $d(v_i)=1=\dim(F_i)$ donc $u_{|F_i}$ est cyclique

    Donc, $\boxed{\text{la propriété } (\mathcal{R}) \text{ est réalisée si } u \text{ est une homothétie.}}$

Section B - Cas où u n'est pas une homothétie

40. À la question 6., on a vu que u est une homotétie si et seulement si $d(e)=1$ pour tout vecteur e n on nul.

    Par contraposée, puisque u n'est pas une homotétie, $\boxed{\text{il existe } e \text{ vecteur non nul de } E \text{ tel que } d(e)\neq 1.}$

41. Si $d(e)=n$, d'après 7. u est cyclique.

    Donc avec $p=1$, en choisissant $F_1=E$, on a $E=F_1$ non nnul, stable par u, et $u_{|F_1}=u$ cyclique.

    $\boxed{(\mathcal{R})) \text{ est réalisée si } d=n.}$

42. φ est une application de E dans $\mathbb{K}$.

$e_{d-1} = \sum_{k\neq d-1} 0e_k + 1e_{d-1}$ donc $\varphi(e_{d-1}) = 1$ et φ est non nulle.

Pour tout $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=0}^{n-1} y_k e_k$ de E et $\lambda \in \mathbb{K}$,

alors $\lambda x + y = x = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda x_k + y_k) e_k$

et $\varphi(\lambda x + y) = \lambda x_{d-1} + y_{d-1} = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.

variante : la $(d-1)^{ème}$ coordonnée de la combinaison $\lambda x + y$ est la combinaison des $(d-1)^{ème}$ coordonnées.

Donc $\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$

$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est une forme linéaire non nulle de } E.}$

43. Pour tout $k \in [[1,d]]$, $\varphi \circ u^{d-k}$, composée d'applications linéaires, est linéaire.

Donc, pour tout x et $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda x + y) &= \left(\lambda\varphi \circ u^{d-k}(x) + \varphi \circ u^{d-k}(y)\right)_{k\in[[1,d]]}\\ &= \lambda\left(\varphi \circ u^k(x)\right)_{k\in k\in[[1,d]]} + \left(\varphi \circ u^k(y)\right)_{k\in k\in[[1,d]]}\\ &= \lambda\Phi(x) + \Phi(y)\end{aligned}$$

et $\boxed{\Phi \text{ est bien linéaire.}}$

44. $\Phi(e_0) = \left(\varphi\left(u^{d-1}(e)\right), \varphi\left(u^{d-2}(e)\right), \ldots, \varphi(u(e)), \varphi(e)\right) = (1, 0\cdots, 0)$

car $\varphi\left(u^k(e)\right) = 0$ si $k \neq d-1$ et $= 1$ si $k = d-1$

$\Phi(e_1) = \Phi(u(e_1)) = \left(\varphi\left(u^d(e)\right), \varphi\left(u^{d-1}(e)\right), \ldots, \varphi(u(e))\right) = \left(\varphi\left(u^d(e)\right), 1, 0, \cdots, 0\right)$

pour tout $k \in [[1, d-1]]$, et pour $j \in [[0, d-1]]$: $\varphi\left(u^{d-j-1}\left(u^k(e)\right)\right) = \varphi\left(u^{d-j-1+k}(e)\right) = 0$ si $d - j - 1 + k \neq d - 1$ c'est à dire si $j \neq k$

Donc $\boxed{\text{avec } (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-1,k}) = \left(\varphi\left(u^{d-1}(e_k)\right), \varphi\left(u^{d-k}(e_k)\right)\right) \text{ on a } \Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-1,k},, 1, 0,}$

45. On a ainsi les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}(e,d)$ de F_1 et

$\boxed{\begin{array}{c}\text{la matrice de } \tilde{\Phi} \text{ de la base } \mathcal{B}(e,d) \text{ de } F_1 \text{ dans la base canonique de } \mathbb{K}^d \text{ est triangulaire,}\\ \text{avec diagonale de } 1 \neq 0\end{array}}$

Cette matrice étant inversible, $\boxed{\tilde{\Phi} \text{ est bijectif.}}$

46. **Supplémentaires :** Puisque $\tilde{\Phi} = \Phi_{|F_1}$ est injective, son noyau est réduit à 0.

Donc, si $x \in F_1 \cap \ker(\Phi)$ alors $\Phi(x) = 0$ et $x \in F_1$ donc $x \in \ker\left(\tilde{\Phi}\right)$ et $x = 0$ et $\underline{F_1 \text{ et } \ker(\Phi) = G \text{ sont en somm}}$

Soit $x \in E$, alors $\Phi(x) \in \mathbb{K}^d$, donc ($\tilde{\Phi}$ surjective), il existe $y \in F_1$ tel que $\tilde{\Phi}(y) = \Phi(x)$

Soit alors $z = x - y$, on a $\Phi(z) = \Phi(x) - \Phi(y) = \Phi(x) - \tilde{\Phi}(y) = 0$ donc $z \in G$

et $x = y + z \in F_1 + G$ donc $E \subset F + G$ et $\underline{E = F + G}$

D'où $\boxed{E = F_1 \oplus G}$

Stablité : (Merci à Noël Magnis) Soit $x \in G = \ker(\Phi)$, montrons que $u(x) \in G$.

On a $\Phi(x) = \left(\varphi\left(u^{d-k}(x)\right)\right)_{k\in[[1,d]]} = 0$ donc, pour tout $k \in [[1,d]]$: $\varphi\left(u^{d-k}(x)\right) = 0$.

D'autre part $\Phi(u(x)) = \left(\varphi\left(u^{d-k+1}(x)\right)\right)_{k\in[[1,d]]}$ et $\varphi\left(u^{d-(k-1)}(x)\right) = 0$ pour tout $k-1 \in [[1,d]]$ donc $\underline{\text{pour tout } k \in [[2,d]]}$.

Reste à voir, pour $k = 1$, que $\varphi\left(u^d(x)\right) = 0$.

Or $d(e)$ est le cardinal maximal pour tout vecteur, donc $d(x) \leq d(e) = d$.

Et $u^d(x) \in E_u(x) = \text{Vect}\left(x, \cdots, u^{d(x)-1}(x)\right) \subset \text{Vect}\left(\left(u^{d-k}(x)\right)_{k\in[[1,d]]}\right)$.

Et comme leurs images par φ sont nulles, par linéarité de φ, $\varphi\left(u^d(x)\right) = 0$

et $\Phi(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \ker(\Phi)$.

47. Avec $e \in F_1$ non nul, on a $\mathcal{B}(e,d) = \left(e, \cdots, u^{d-1}(e)\right) = \left(e, \cdots, u_{|F_1}^{d-1}(e)\right)$ base de F_1 donc libre.

    Donc $d_{|F_1}(e) \geq d = \dim(F_1)$ et $d_{|F_1}(e) = d$.

    Et d'après 7. $\boxed{u_{|F_1} \text{ est bien un endomorphisme cyclique de } F_1.}$

48. e avait été choisi tel que $d(e)$ soit le maximum des $d(x)$ avec $x \in E$ non nul.

    Donc $\boxed{\text{pour tout vecteur } e' \in G^* \subset E^*,\ d(e') \leq d(e) = d.}$

49. On procède par récurrence sur la dimension de E.

    Si $\dim(E) = 1$, avec $p = 1$, $F_1 = E$, est stable par u qui est une homotétie donc $u_{|F_1} = u$ est cyclique.

    Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que si u est un endomorphisme de E alors $(\mathcal{R})$ est vérifié,

    avec E de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$

    ou bien u est une homotétie et $(\mathcal{R})$ est vérifiée,

    Sinon si $d = n+1$, d'après 44. $(\mathcal{R})$ est réalisé

    Sinon si $d < n+1$, d'après 46. et 49., il existe F_1 et G tels que

    $E = F_1 \oplus G$, $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F_1)$ donc non réduit à 0,

    G stables par u avec $u_{|F_1}$ cyclique.

    Comme $\dim(G) < n+1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de u à G qui se décompose $G = F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$

    D'où la réalisation de $(\mathcal{R})$ pour E. Et, par récurrence,

    $\boxed{(\mathcal{R}) \text{ est vraie pour tout espace vectoriel } E \text{ de dimension finie et tout } u \in \mathcal{L}(E).}$

Section C - Première application : décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents

50. Pour e un vecteur de $\mathcal{B}_{F_k}$, $u(e) \in F_k$ car F_k est stable. Donc les coordonnées de $u(e)$ sont nulles en dehors de celles sur $\mathcal{B}_{F_k}$.

    Et la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs.

    Avec $M_k = \text{mat}_{\mathcal{B}_{F_k}}(u)$ on a $\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_p \end{pmatrix}}$ les 0 étant des matrices rectangulaires nulles.

51. On part de la décomposition issue de $(\mathcal{R})$.

    Sur chaque F_i, la restriction de u est donc nilpotente et cyclique.

    et d'après 32., il existe alors une base de F_i dans la quelle la matrice de la restriction est nulle en dehors d'une sous diagonale de 1.

    La matrice obtenue au 53. est avec de telles matrices M_i, donc nulle en dehors de la sous diagonale où les termes sont 1 (dans la matrice M_i) ou 0 à l'angle de M_i et M_{i+1}.

Section D - Deuxième application : toute matrice carrée est semblable à sa transposée

52. A est la matrice de u et S celle de f donc AS est la matrice de $u \circ f$ sur la base $\mathcal{B}(e,n)$ de E.

    Par linéarité de u :

$$\begin{aligned} u(f(e)) &= u\left(-\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e)\right) + u^{n-1}(e)\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^k(e) + u^n(e) = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^k(e) \end{aligned}$$

    Or $u^n(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e) = 0$ (nilpotente d'indice n) donc $\boxed{u(f(e)) = a_0 e}$ dont les coordonénes sont $(a_0, 0 \cdots, 0)$

    Puis, directement $\boxed{u(f(u(e))) = -\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-1}(e) + u^{n-1}(e)}$
    dont les coordonnées sont $(0, -a_2, \cdots, -a_{n-1}, 1)$; et pour tout $j \in [[0, n-2]]$,

$$\begin{aligned} u\left(f\left(u^j(e)\right)\right) &= -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1+1}(e)\right) + u^{n-j-1+1}(e) \\ &= -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j}(e)\right) + u^{n-j}(e) \end{aligned}$$

    et $u\left(f\left(u^{n-1}(e)\right)\right) = u(e)$

    On a alors les coordonnées des images par $u \circ f$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}(e,n)$

    Donc $\boxed{\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(e,n)(u \circ f) = AS}$

53. Les colonnes de S étant échelonnées (et non nulles) $\operatorname{rg}(S) = n$ donc $\boxed{S \text{ inversible.}}$

    Comme elle est symétrique réelle, son inverse S_2 l'est également.

    Enfin $AS = S_1$ d'près la question précédente, est aussi symétrique.

    on a donc $A = S_1 S_2$ où S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques réelles.

54. $M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_n}(u)$ et $P = P_{B_n, B(e,n)}$

    et d'après la formule de changement de base,$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_n}(u) = P \operatorname{mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u) P^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} M &= PAP^{-1} \\ &= PS_1S_2P^{-1} \\ &= PS_1\left({}^tP\right)\left({}^tP\right)^{-1} S_2P^{-1} \end{aligned}$$

    Comme S_1 et S_2 sont symétriques $V = PS_1\,{}^tP$ et $W = {}^tP^{-1} S_2 P^{-1}$ le sont aussi :
    ${}^tV = {}^t\left({}^tP\right) {}^tS_1\, {}^tP = PS_1\, {}^tP = V$ et de même pour W.

    $S_2 = S^{-1}$ est inversible, donc par produit de matrices inversibles, $W = {}^tP^{-1} S_2 P^{-1}$ est inversible.

    Donc $\boxed{M \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{S}).}$

55. Avec les notations précédentes, on a $M = VW$ donc ${}^tM = {}^tW\,{}^tV = WV$

    Et comme W est inversible, ${}^tM = {}^tW\,{}^tV = WV = W(VW)W^{-1} = WMW^{-1}$

    Donc $\boxed{{}^tM \text{ et } M \text{ sont semblables avec } Q = W^{-1}}$

56. Le calcul par blocs n'est pas au programme en ECS. Cependant, donner une matrice de passage par bloc est vrai est sera probablement accepté pour cette dernière question (pour celles et ceux qui y arriveront)
On peut cependant s'en passer en utilisant les changements de bases cachés sous les matrices semblables.
