DS11

Correction du concours blanc type Maths 3

Exercice 1 (Edhec 2012)

1. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. Notons $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ une densité de X_0. La variable $-xX_0$ étant une transformation affine d'une variable à densité, elle est aussi à densité. Et une densité de $-xX_0$ est donnée par :

$$\boxed{\psi_x : t \mapsto \frac{1}{|-x|}\varphi\left(\frac{t-0}{-x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\dfrac{t}{x} < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x}e^{-\lambda\frac{t}{-x}} & \text{si } -\dfrac{t}{x} \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\lambda}{x}e^{\frac{\lambda t}{x}} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.}$$

(b) **Étape 1. Justification du produit de convolution.**
Les variables X_1 et $-xX_0$ sont des variables à densité, de densités respectives φ et ψ_x. De plus :

- la fonction φ est bornée (car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varphi(t) \leq \lambda$) ;
- les variables X_1 et X_0 sont indépendantes donc X_1 et $-xX_0$ le sont également.

Par le théorème de produit de convolution, on en déduit que la variable $X_1 - xX_0 = X_1 + (-xX_0)$ est à densité et elle admet pour densité la fonction f définie (et continue) sur $\mathbb{R}$ par l'intégrale convergente :

$$f : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi_x(z-t)\,\mathrm{d}t$$

Étape 2. Réduction du domaine d'intégration et calcul.
Fixons $z \in \mathbb{R}$. On a :

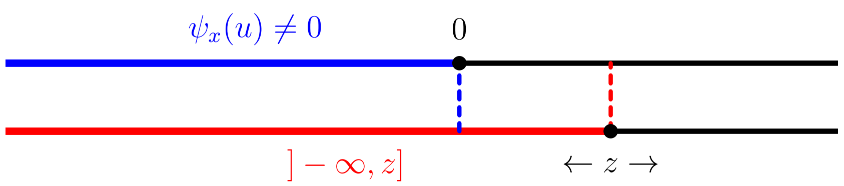
$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi_x(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \psi_x(z-t)\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On effectue dans cette intégrale le changement de variables $u = z - t$, affine donc licite. On a $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$, et $u : z \to -\infty$ lorsque $t : 0 \to +\infty$. On obtient donc :

$$f(z) = \int_{z}^{-\infty} \psi_x(u)\lambda e^{-\lambda(z-u)}(-\mathrm{d}u) = \int_{-\infty}^{z} \psi_x(u)\lambda e^{-\lambda(z-u)}\mathrm{d}u.$$

La fonction intégrée est non nulle sur $]-\infty,z] \cap]-\infty,0]$. On a alors deux cas à considérer.

- **Cas où $z \geq 0$.** On est alors dans la situation suivante :



On a $]-\infty,z] \cap]-\infty,0] =]-\infty,0]$ et donc :

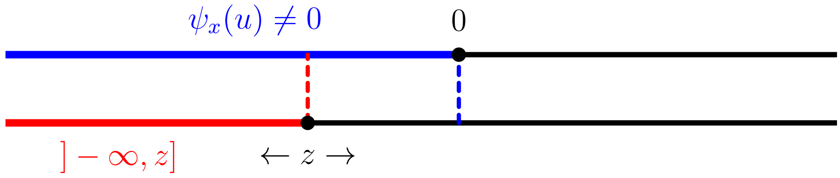
$$f(z) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{x}e^{\frac{\lambda u}{x}}\lambda e^{-\lambda(z-u)}\mathrm{d}u = \frac{\lambda^2}{x}e^{-\lambda z}\int_{-\infty}^{0} \exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda u\right)\mathrm{d}u.$$

La fonction intégrée est continue sur $]-\infty,0]$, donc l'intégrale est généralisée en $-\infty$. Soit $A < 0$. On a :

$$\begin{aligned}\int_{A}^{0} \exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda u\right)\mathrm{d}u &= \left[\frac{x}{\lambda(x+1)}\exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda u\right)\right]_A^0 \\ &= \frac{x}{\lambda(x+1)}\left(1 - \exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda A\right)\right) \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{\lambda(x+1)}\end{aligned}$$

On obtient donc $f(z) = \dfrac{\lambda^2}{x}\dfrac{x}{\lambda(x+1)}e^{-\lambda z} = \dfrac{\lambda}{x+1}e^{-\lambda z}$ dans le cas où $z \geq 0$.

- **Cas où $z < 0$.** On est cette fois dans la situation suivante :



On a cette fois $]-\infty, z] \cap]-\infty, 0] =]-\infty, z]$, de sorte que :

$$f(z) = \frac{\lambda^2}{x}e^{-\lambda z}\int_{-\infty}^{z} \exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda u\right) \mathrm{d}u.$$

Comme précédemment, on a pour tout $A < z$:

$$\begin{aligned}\int_A^z \exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda u\right) \mathrm{d}u &= \left[\frac{x}{\lambda(x+1)} \exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda u\right)\right]_A^z \\ &= \frac{x}{\lambda(x+1)}\left(\exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda z\right) - \exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda A\right)\right) \\ &\underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{\lambda(x+1)} \exp\left(\frac{x+1}{x}\lambda z\right)\end{aligned}$$

On obtient donc $f(z) = \dfrac{\lambda^2}{x}\dfrac{x}{\lambda(x+1)}e^{-\lambda z} = \dfrac{\lambda}{x+1}\exp\left(-\lambda z + \dfrac{x+1}{x}\lambda z\right) = \dfrac{\lambda}{x+1}\exp\left(\dfrac{\lambda}{x}z\right)$ pour $z < 0$.

En résumé, nous avons bien prouvé qu'une densité de $X_1 - xX_0$ est donnée par :

$$\boxed{f : z \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1}\exp\left(\dfrac{\lambda z}{x}\right) & \text{si } z < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1}\exp(-\lambda z) & \text{si } z \geq 0. \end{cases}}$$

(c) Comme X_1 et X_0 prennent presque sûrement des valeurs strictement positives (car $P(X_1 > 0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$, et de même pour X_0), T prend presque sûrement des valeurs strictement positives. Ainsi on a $F_T(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$.

Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}F_T(x) &= P(T \leq x) = P\left(\frac{X_1}{X_0} \leq x\right) = P(X_1 \leq xX_0) = P(X_1 - xX_0 \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f(z)\mathrm{d}z \\ &= \frac{\lambda}{x+1}\int_{-\infty}^{0} \exp\left(\frac{\lambda z}{x}\right) \underset{\frac{\lambda}{x}\neq 0}{=} \frac{\lambda}{x+1}\lim_{y\to-\infty}\left[\frac{x}{\lambda}\exp\left(\frac{\lambda z}{x}\right)\right]_y^0 = \frac{\lambda}{x+1}\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\exp\left(\frac{\lambda y}{x}\right)\right) \\ &\underset{\frac{\lambda}{x}>0}{=} \frac{\lambda}{x+1}\frac{x}{\lambda} = \frac{x}{x+1}.\end{aligned}$$

On obtient donc pour fonction de répartition de T :

$$\boxed{F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

2. Commençons par noter (ça nous servira dans la suite) que T est une variable à densité car sa fonction de répartition F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0.

T étant à valeurs positives (puisque $P(T \leq 0) = F_T(0) = 0$), $X = \lfloor T \rfloor + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (en revenant, comme à chaque fois qu'on rencontre une partie entière, aux inégalités définissant cette partie entière) :

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(\lfloor T \rfloor = n-1) = P(n-1 \leq T < n) = P(n-1 < T \leq n) \quad \text{car } T \text{ continue} \\ &= P(T \leq n) - P(T \leq n-1) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.}$$

3. (a) C'est un cas particulier de la question 1.(a) avec $x = 1$. Un densité de $-X_0$ est donc :

$$\boxed{\psi_1 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ \lambda \exp(\lambda t) & \text{si } t < 0 \end{cases}.}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x)$$

car les X_i sont indépendantes. Comme elles sont de plus de même loi, on en déduit que :

$$\boxed{G_n : x \mapsto (F_{X_1}(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.}$$

G_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 car F_{X_1} l'est. Donc Y_n est une variable à densité. Et une densité de Y_n est (en prenant une valeur arbitraire en 0) :

$$\boxed{g_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ n\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} & \text{si } t > 0 \end{cases}.}$$

Remarque. G_n' n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$, car G_n n'est pas dérivable en 0, et donc il serait inexact de dire qu'une densité de Y_n est G_n'.

(c) **Étape 1. Justification du produit de convolution.**

Y_n et $-X_0$ sont des variables à densité, de densités respectives g_n et ψ_1. De plus :

- la fonction g_n est bornée (car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq g_n(t) \leq n\lambda$) ;
- les variables $X_0, X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, et donc Y_n et $-X_0$ également par lemme de coalition.

Par le théorème de produit de convolution, la variable $Y_n - X_0 = Y_n + (-X_0)$ est à densité, et une densité est donnée par le produit de convolution :

$$h_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\psi_1(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Étape 2. Réduction du domaine d'intégration et calcul.

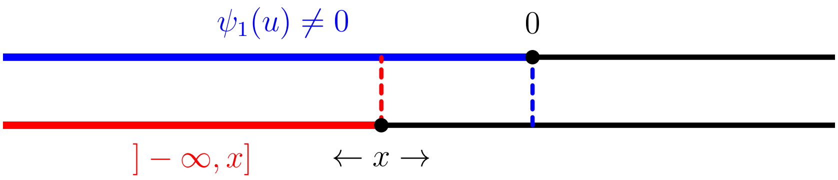
Fixons $x < 0$. On a :

$$h_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\psi_1(x-t)\,\mathrm{d}t = n\lambda \int_0^{+\infty} \psi_1(x-t) e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

On effectue dans cette intégrale le changement de variables $u = x - t$, affine donc licite. On a $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$, et $u : x \to -\infty$ lorsque $t : 0 \to +\infty$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= n\lambda \int_x^{-\infty} \psi_1(u) e^{-\lambda(x-u)} (1 - e^{-\lambda(x-u)})^{n-1} (-\mathrm{d}u) \\ &= n\lambda \int_{-\infty}^{x} \psi_1(u) e^{-\lambda(x-u)} (1 - e^{-\lambda(x-u)})^{n-1} \mathrm{d}u \end{aligned}$$

La fonction intégrée est non nulle sur $]-\infty, x] \cap]-\infty, 0]$. Représentons ces intervalles pour en déterminer l'intersection :



On a $]-\infty, x] \cap]-\infty, 0] =]-\infty, x]$, et donc :

$$h_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{\lambda u} n\lambda e^{-\lambda(x-u)} (1 - e^{-\lambda(x-u)})^{n-1} \mathrm{d}u$$

Soit $A < x$. On effectue une intégration par parties sur le **segment** $[A, x]$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & \lambda e^{\lambda u} & & n\lambda e^{-\lambda(x-u)}(1 - e^{-\lambda(x-u)})^{n-1} \\ & & \searrow & \\ - & \lambda^2 e^{\lambda u} & \overset{\int}{\leftarrow} & -(1 - e^{-\lambda(x-u)})^n \end{array}$$

Les fonctions $u \mapsto \lambda e^{-\lambda u}$ et $u \mapsto (1 - e^{-\lambda(x-u)})^n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A, x]$. D'où par intégration par parties :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \left[-\lambda e^{\lambda u} (1 - e^{-\lambda(x-u)})^n \right]_A^x + \int_A^x \lambda^2 e^{\lambda u} (1 - e^{-\lambda(x-u)})^n \mathrm{d}u \\ &= 0 + \lambda e^{\lambda A} (1 - e^{-\lambda(x-A)})^n + \int_A^x \lambda^2 e^{\lambda u} (1 - e^{-\lambda x} e^{\lambda u})^n \mathrm{d}u \\ &= \lambda e^{\lambda A} (1 - e^{-\lambda(x-A)})^n + \left[-\frac{\lambda}{(n+1)e^{-\lambda x}} (1 - e^{-\lambda x} e^{\lambda u})^{n+1} \right]_A^x \\ &= \lambda e^{\lambda A} (1 - e^{-\lambda(x-A)})^n - 0 + \frac{\lambda}{(n+1)} e^{\lambda x} (1 - e^{-\lambda x} e^{\lambda A})^{n+1} \\ &\underset{A \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{n+1} e^{\lambda x} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x < 0,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda e^{\lambda x}.}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $[Z > n] \cup [Z = 0]$ se réalise si et seulement si on a $X_i \leq X_0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit si et seulement si $Y_n \leq X_0$. D'où l'égalité des évènements :

$$[Z > n] \cup [Z = 0] = [Y_n \leq X_0].$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leq X_0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} ([Z > k] \cup [Z = 0]) = \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [Z > k] \right) \cup [Z = 0].$$

Mais $\bigcap_{k=1}^{+\infty}[Z > k] = \emptyset$, puisque Z prend une valeur finie par définition, et ne peut donc être supérieure à tous les entiers naturels. On obtient donc :

$$\boxed{\bigcap_{k=1}^{+\infty}[Y_k \leq X_0] = [Z = 0].}$$

De plus, nous savons que :

$$P(Y_n \leq X_0) = P(Y_n - X_0 \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{n+1}\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Mais grâce à l'égalité démontrée précédemment, on a $[Z = 0] \subset [Y_n \leq X_0]$ pour tout $n \geq 1$, et donc :

$$0 \leq P(Z = 0) \leq P(Y_n \leq X_0) = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\boxed{P(Z = 0) = 0.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la question 4.(a), on a :

$$P(Y_n \leq X_0) = P(Z > n) + P(Z = 0) = P(Z > n)$$

par incompatibilité des évènements $[Z > n]$ et $[Z = 0]$. Mais $P(Y_n \leq X_0)$ a été calculé à la question précédente, et vaut $\dfrac{1}{n+1}$. On obtient donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Z = n) = P(Z > n-1) - P(Z > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \boxed{= P(X = n).}$$

5. (a) Puisque $U \in [0, 1[$ presque sûrement, on a $V \in [0, +\infty[$ presque sûrement. En particulier, on a $F_V(x) = 0$ pour tout $x < 0$.

Soit à présent $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} F_V(x) = P(V \leq x) = P(\ln(1-U) \geq -\lambda x) &\underbrace{=}_{\text{exp croissante}} P(1 - U \geq e^{-\lambda x}) \\ &= P(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

car $1 - e^{-\lambda x} \in [0, 1[$ lorsque $x \geq 0$. Ainsi on a :

$$F_V : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On reconnait ici la fonction de répartition de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$, de sorte que $\boxed{V \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda).}$

(b) La question précédente nous permet de simuler une loi exponentielle à l'aide de la commande `rand`. On revient ensuite à la définition de Z : on fixe une réalisation de X_0, puis on simule la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ jusqu'à obtenir une réalisation strictement plus grande que celle de X_0. Ce qui peut se traduire comme suit en `Scilab`.

```
function z = simule(lbd)
      z = 1 ;
      X0 = -(1/lbd)*log(1-rand()) ;
      X = -(1/lbd)*log(1-rand()) ;
      while X <= X0
            X = -(1/lbd)*log(1-rand()) ;
            z = z+1 ;
      end
endfunction
```

La variable `X0` sert à simuler X_0, puis `X` contient les simulations successives de $X_1, X_2, \ldots$ Tant qu'aucun des X_i n'est pas strictement supérieur à X_0, on ajoute `1` à `z`, et on simule la variable X_i suivante (dont la valeur est stockée dans `X`).

Remarque. Notons qu'en théorie la boucle `while` pourrait tourner indéfiniment et ne jamais s'arrêter. Mais ceci correspond au cas où $Z = 0$, et nous avons prouvé que la probabilité que cela arrive est nulle.

Exercice 2 (EML 2020)

Partie A : Étude d'un produit scalaire.

1. L'intégrale converge évidemment pour $P = 0$.

   Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, et notons $a_n X^n$ son terme dominant (où $a_n \neq 0$ et $n = \deg(P)$). La fonction intégrée $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. On a :

   - $t^2 P(t)e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\sim} a_n t^{2+n} e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, de sorte que $P(t)e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$;
   - $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$ pour tout $t > 0$;
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$ en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $\alpha = 2 > 1$.

   Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

2. Toujours d'après la première question, on notera que l'intégrale définissant $\langle P, Q\rangle$ est bien définie pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, de sorte que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien une application de $\mathbb{R}[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$..

   Montrons qu'il s'agit d'un produit scalaire.

   - *linéarité à gauche.* Pour tout P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\begin{aligned} \langle \alpha P + \beta Q, R\rangle &= \int_0^{+\infty} (\alpha P + \beta Q)(t) R(t) e^{-t} dt \\ &\underset{\text{tout converge !}}{=} \alpha \int_0^{+\infty} P(t) R(t) e^{-t} dt + \beta \int_0^{+\infty} Q(t) R(t) e^{-t} dt \\ &= \alpha \langle P, R\rangle + \beta \langle Q, R\rangle \end{aligned}$$

     Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

   - *Symétrie.* Pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}[X]^2$, on a :

   $$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle .$$

     Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, et également bilinéaire.

   - *Positif.* On a pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

   $$\langle P, P\rangle = \int_0^{+\infty} \underbrace{P^2(t)\, e^{-t}}_{\geq 0}\, \mathrm{d}t \geq 0$$

     par positivité de l'intégrale.

- *Défini positif.* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. On a :

$$\langle P, P\rangle = \int_0^{+\infty} P^2(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = 0.$$

Puisque $t \mapsto P^2(t)\, e^{-t}$ est une fonction **continue** et **positive** sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit par théorème de nullité de l'intégrale que :

$$\forall t > 0, \quad P^2(t)e^{-t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0, \quad P(t) = 0.$$

P admet une infinité de racines (tous les réels positifs strictement), et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$\boxed{\text{Donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire.}}$

3. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\langle X^i, X^j\rangle = \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t}\, \mathrm{d}t = I_{i+j} \boxed{= (i+j)!}$$

En particulier, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\|X^i\| = \sqrt{\langle X^i, X^i\rangle} \boxed{= \sqrt{(2i)!}.}$$

4. (a) On va construire une telle famille (Q_0, Q_1, Q_2) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, en orthonormalisant la famille $(P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2)$.

- On a $\|P_0\| \overset{4.}{=} \sqrt{(0+0)!} = 1$. Posons donc $Q_0 = \dfrac{P_0}{\|P_0\|} = 1$.
- On procède en deux étapes :
  - on « redresse » P_1 en un vecteur orthogonal à Q_0. Pour cela, on pose :

$$R_1 = P_1 - \langle P_1, Q_0\rangle Q_0 = X - \langle X, 1\rangle 1 = X - (1+0)! = X - 1.$$

  - On normalise R_1. On a[1] :

$$\|R_1\|^2 \underset{\text{Pythagore}}{=} \|P_1\|^2 - \|\langle P_1, Q_0\rangle Q_0\|^2 = 2! - \langle X, 1\rangle^2 = 2 - (1+0)!^2 = 1,$$

  et donc $Q_1 = \dfrac{R_1}{\|R_1\|} = X - 1$.
- On procède en deux étapes encore.
  - on « redresse » P_2 en un vecteur orthogonal à Q_0 et Q_1 en posant :

$$\begin{aligned} R_2 &= P_2 - \langle P_2, Q_0\rangle Q_0 - \langle P_2, Q_1\rangle Q_1 = X^2 - \langle X^2, 1\rangle 1 - \langle X^2, X-1\rangle (X-1) \\ &= X^2 - (2+0)! - \Big(\langle X^2, X\rangle - \langle X^2, 1\rangle\Big)(X-1) = X^2 - 2 - ((2+1)! - (2+0)!)(X-1) \\ &= X^2 - 4X + 2. \end{aligned}$$

  - On normalise R_2. On a :

$$\begin{aligned} \|R_2\|^2 &\underset{\text{Pythagore}}{=} \|P_2\|^2 - \langle P_2, Q_0\rangle^2 - \langle P_2, Q_1\rangle^2 = (2+2)! - (2+0)!^2 - (2+1)! - (2+0)!^2 \\ &= 24 - 4 - 16 = 4 \end{aligned}$$

  et donc $Q_2 = \dfrac{R_2}{\|R_2\|} = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1$.

[1] Utiliser le théorème de Pythagore simplifie quelque peu les calculs. On pouvait aussi développer le produit scalaire directement pour obtenir le même résultat.

En répétant ce procédé, on construit ainsi une famille de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Par unicité, on a donc $\boxed{Q_0 = 1,\ Q_1 = X-1,\ Q_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1.}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $\mathscr{C}_k$ est une famille orthonormée de polynômes de $\mathbb{R}_k[X]$. Elle est donc libre, de cardinal $k+1 = \dim(\mathbb{R}_k[X])$. $\boxed{\mathscr{C}_k \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_k[X].}$

5. (a) Pour tout i et j : $h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle = (i+j-2)!$

Donc $\boxed{H_2 = \begin{pmatrix} 0! & 1! & 2! \\ 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}}$

Et $\begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc H_2 est inversible et $\boxed{H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

(b) On a (puisque $\mathscr{C}_2$ est orthonormée) :

$$1 = \langle 1, Q_0\rangle Q_0 + \langle 1, Q_1\rangle Q_1 + \langle 1, Q_2\rangle Q_2 = Q_0,$$

$$X = \langle X, Q_0\rangle Q_0 + \langle X, Q_1\rangle Q_1 + \langle X, Q_2\rangle Q_2 = Q_0 + Q_1,$$

$$X^2 = \langle X^2, Q_0\rangle Q_0 + \langle X^2, Q_1\rangle Q_1 + \langle X^2, Q_2\rangle Q_2 = 2Q_0 + 4Q_1 + 2Q_2,$$

après calculs de tous ces produits scalaires (que je n'ai pas détaillé ici, à vous de le faire !). D'où par définition d'une matrice de passage :

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & X & X^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{array} \boxed{= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

On a alors : $\quad {}^tA_2\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \boxed{= H_2.}$

6. (a) A_n est la matrice de passage de la base $\mathscr{C}_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$. Donc $\boxed{A_n \text{ est inversible.}}$

(b) Par définition de A_n, les $(a_{k,j})_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ sont les coordonnées du vecteur X^{j-1} dans la base $\mathscr{C}_n = (Q_0, \ldots, Q_n)$, de sorte que :

$$\boxed{X^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j} Q_{k-1}.}$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle &= \langle \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}Q_{k-1}, \sum_{\ell=1}^{n+1} a_{\ell,j}Q_{\ell-1}\rangle \\ &\underset{\text{bil. du prod. scal.}}{=} \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1} a_{k,i}a_{\ell,j} \underbrace{\langle Q_{k-1}, Q_{\ell-1}\rangle}_{=\delta_{k,\ell}} \end{aligned}$$

où $\delta_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ car la famille $\mathscr{C}_n$ est orthonormée. On obtient donc :

$$\boxed{\langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j}}$$

(c) Pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]$, on a :

$$h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle \overset{7.(b)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} [\ {}^tA_n]_{i,k} [A_n]_{k,j} = [\ {}^tA_n A_n]_{i,j}.$$

D'où l'égalité : $\boxed{H_n = \ {}^tA_n A_n.}$

7. (a) Nous avons vu plus haut que A_n est inversible. ${}^tA_n$ l'est donc également, et $\boxed{H_n \text{ est inversible}}$ comme produit de matrices inversibles.

(b) On a :

$${}^tH_n = {}^t\left({}^tA_n A_n\right) = {}^tA_n\ {}^t\left({}^tA_n\right) = {}^tA_n\ A_n = H_n.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } H_n \text{ est symétrique réelle, donc diagonalisable.}}$

(c) Soit α une valeur propre et $Y \in \mathscr{M}_{n+1,1}$ un vecteur propre associé. On a :

$${}^tY\ H_n Y = {}^tY\ \alpha Y = \alpha \left\|Y\right\|^2_{\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})}$$

où $\|\cdot\|_{\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})}$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. D'autre part, on a :

$${}^tY\ H_n Y = {}^tY\ {}^tA_n\ A_n Y = {}^t\left(A_n Y\right)\ A_n Y = \left\|A_n Y\right\|^2_{\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})}.$$

On obtient donc (puisque $\|Y\|_{\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})} \neq 0$ car Y est vecteur propre) :

$$\alpha = \frac{\left\|A_n Y\right\|^2_{\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})}}{\left\|Y\right\|^2_{\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})}}$$

qui est positif. Plus précisément, on a même $\alpha > 0$ car $A_n Y \neq 0_{n+1,1}$ puisque A_n est inversible et $Y \neq 0_{n+1,1}$. Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres de } H_n \text{ sont strictement positives.}}$

Partie B : Étude d'une projection.

8. (a) Par définition de V, on a : $R = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$
D'où pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\left\langle R, X^i \right\rangle \underset{\text{lin. à gauche}}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k \left\langle X^k, X^i \right\rangle \underset{\text{symétrie}}{=} \boxed{\sum_{k=0}^n \alpha_k \left\langle X^i, X^k \right\rangle.}$$

(b) Prenons donc $R \in \mathbb{R}_n[X]$. R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $P - R$ est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$, soit :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \langle P - R, X^i \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\forall i \in [\![0, n]\!], \langle P, X^i \rangle = \langle R, X^i \rangle.}$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$[U]_{i+1,1} = \langle P, X^i \rangle = \langle R, X^i \rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left\langle X^i, X^k \right\rangle. = \sum_{k=0}^n h_{i+1,k+1} \alpha_k = [H_n V]_{i+1,1}$$

ce qui équivaut encore à $U = H_n V$. Puisqu'enfin, H_n est inversible, on en déduit que R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\boxed{V = H_n^{-1} U.}$

9. Soit $R = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. D'après la question précédente, R est le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement s'il satisfait le système :

$$\begin{cases} \langle X^3, 1 \rangle = \langle R, 1 \rangle \\ \langle X^3, X \rangle = \langle R, X \rangle \\ \langle X^3, X^2 \rangle = \langle R, X^2 \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3! = a\langle 1, 1 \rangle + b\langle X, 1 \rangle + c\langle X^2, 1 \rangle \\ 4! = a\langle 1, X \rangle + b\langle X, X \rangle + c\langle X^2, X \rangle \\ 5! = a\langle 1, X^2 \rangle + b\langle X, X^2 \rangle + c\langle X^2, X^2 \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2c = 6 \\ a + 2b + 6c = 24 \\ 2a + 6b + 24c = 120 \end{cases}$$

ce qui équivaut encore, après résolution par l'algorithme du pivot de Gauss, à : $\begin{cases} a = 6 \\ b = -18 \\ c = 9 \end{cases}$

Ainsi, le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $\boxed{R = 9X^2 - 18X + 6.}$

Remarque. Une autre méthode, qui n'était pas celle suggérée par l'énoncé, consiste à remarquer que nous avons calculé une base orthonormée $(Q_0 = 1, Q_1 = X - 1, Q_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ à la question 5.(a) de la partie A. Par le cours, on sait alors que le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est donné par :

$$\begin{aligned} R &= \left\langle X^3, Q_0 \right\rangle Q_0 + \left\langle X^3, Q_1 \right\rangle Q_1 + \left\langle X^3, Q_2 \right\rangle Q_2 \\ &= 6Q_0 + (24 - 6)\, Q_1 + \left(\frac{1}{2}120 - 2 \times 24 + 6\right) Q_2 \\ &= 6 + 18\,(X - 1) + 18\left(\frac{1}{2}X^2 - 2X + 1\right) \\ &= 9X^2 - 18X + 6 \end{aligned}$$

Exercice 3 (EML 2010)
Préliminaires.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, $\boxed{\text{elle converge donc.}}$ On en déduit en particulier que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc $\boxed{\text{convergente.}}$ Enfin pour la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$, on peut effectuer un théorème de comparaison :

   - $\frac{1}{(2k+1)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4k^2}$;
   - $\frac{1}{k^2} \geq 0$ pour tout $k \geq 1$;
   - $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente.

   Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ converge.}}$

2. Pour $N \geq 1$, on a (en séparant termes pairs et impairs) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

   D'où en faisant tendre N vers $+\infty$ dans cette égalité (tout converge) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

soit encore :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{24} \boxed{= \frac{\pi^2}{8}.}$$

3. Pour $N \geq 1$, toujours en séparant termes pairs et impairs, on a :

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

D'où lorsque N tend vers $+\infty$ (là aussi, tout converge) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} \boxed{= -\frac{\pi^2}{12}.}$$

Partie I : Éléments d'étude de f.

4. La fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$ (car x peut éventuellement être négatif), donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0. Et en 0, on a :

- $\frac{t^x}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$;
- $t^x > 0$ pour tout $t \in]0,1]$;
- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ est une intégrale de Riemann en 0, qui converge si et seulement si $-x < 1 \Leftrightarrow x > -1$.

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge pour tout } x \in J.}$

5. On a :

$$f(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 \boxed{= \ln(2).}$$

$$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1+t)-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [t - \ln(1+t)]_0^1 \boxed{= 1 - \ln(2).}$$

6. Soit $x \in J$. Pour tout $t \in]0,1]$, on a :

$$0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x.$$

Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales en jeu convergent puisque $x \in J$) :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t.$$

Pour $0 < a < 1$, on a :

$$\int_a^1 t^x\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_a^1 = \frac{1-a^{x+1}}{x+1} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x+1}.$$

Ainsi on a :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}.}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut 0.

7. (a) Soit $(x, y) \in J^2$. On a pour tout $t \in]0, 1]$:

$$x \leq y \underbrace{\Rightarrow}_{\ln(t) \leq 0} x\ln(t) \geq y\ln(t) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{exp. croissante}} e^{x\ln(t)} \geq e^{y\ln(t)} \boxed{\Rightarrow t^x \geq t^y.}$$

(b) D'où en divisant l'inégalité précédente par $1 + t > 0$:

$$\frac{t^x}{1+t} \geq \frac{t^y}{1+t} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{croissance de l'intég.}} \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{t^y}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi on a montré que pour tout $(x, y) \in J^2$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$. Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } J.}$

8. Pour tout $x \in J$, on a par linéarité de l'intégrale :

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x \frac{1+t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{quest. 3.}} \boxed{\frac{1}{x+1}.}$$

9. Soit encore $x \in J$, on a par décroissance de f que :

$$2f(x+1) \leq f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \quad \Rightarrow \quad 2f(x+1) \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{x+1} \overset{(**)}{\leq} 2f(x).$$

Supposons $x > 0$ (il a de toute façon vocation à tendre vers $+\infty$). Ces inégalités peuvent se réécrire alors :

$$\frac{1}{x+1} \overset{(**)}{\leq} 2f(x) \leq \frac{1}{x}$$

en appliquant pour l'inégalité de droite l'inégalité $(*)$ avec $x - 1$ en lieu et place de x. D'où en multipliant par $x > 0$:

$$\frac{x}{x+1} \leq 2xf(x) \leq 1.$$

Or on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Par théorème des gendarmes, la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} 2xf(x)$ existe donc et vaut 1, ce qui se réécrit :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$$

10. Soit $x \in J$.

(a) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

Init. Pour $n = 0$, cela résulte immédiatement de la question 8.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n :

$$f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

D'après la question 8., on a $f(n+1+x) = \frac{1}{n+2+x} - f(n+2+x)$, ce qui donne en substituant dans l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+2+x} + (-1)^{n+2} f(n+2+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \\ &= (-1)^{n+2} f(n+2+x) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

On conclut par principe de récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x) - (-1)^{n+1} f(n+1+x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

d'après la question 6. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et on a :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.}$$

11. (a) Pour $(x,y) \in J^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| &= \left|\frac{(k+1+y)-(k+1+x)}{(k+1+x)(k+1+y)}\right| = \left|\frac{y-x}{(k+1+x)(k+1+y)}\right| \\ &\leq \frac{|y-x|}{(k+1+x)(k+1+y)} \boxed{\leq \frac{|x-y|}{k^2}}\end{aligned}$$

car $x+1>0$ et $y+1>0$. La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ étant convergente, on en déduit par théorème de comparaison que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right)$ est absolument convergente. D'où par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+y}\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| = \underbrace{\left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right|}_{\text{terme en } k=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \\ &\leq \left|\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x-y|}{k^2} = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} + |x-y|\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

car $(1+x)(1+y) \geq 0$ et en utilisant le résultat admis à la question 2. On a ainsi montré que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in J^2,\ |f(x)-f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}\right).}$$

(b) Soit $x \in J$ fixé. On a :

$$\lim_{y\to x} |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}\right) = 0.$$

Par théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{y\to x} |f(x)-f(y)|$ existe et vaut 0, et donc $\displaystyle\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. f est donc continue en x. Et ceci étant vrai pour tout $x \in J$, $\boxed{f \text{ est continue sur } J}$.

12. D'après la relation de la question 8., on a pour tout $x \in J$:

$$(x+1)f(x) = 1 - (x+1)f(x+1).$$

Mais par continuité de f en 0, on a $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x+1) = f(0) = \ln(2)$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to -1} (x+1)f(x+1) = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to -1} (x+1)f(x) = 1$, et donc que $\boxed{f(x) \underset{x\to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.}$

Par conséquent, on a $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$.

Partie II : Dérivabilité de f.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathscr{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

13. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in J$:

$$g_k'(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2} \quad \text{et} \quad g_k''(x) = \frac{(-1)^k 2}{(k+1+x)^3}.$$

En particulier, on a pour tout $x \in J$, $|g_k''(x)| \leq \dfrac{2}{(k+1+x)^3} \leq \dfrac{2}{k^3}$ car $x+1>0$. Fixons $x \in J$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange en x à g_k à l'ordre 2 (ce qui est bien possible car g_k est de classe $\mathscr{C}^2$. Pour tout $y \in J$, on a donc :

$$\boxed{\left|g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)\right| \leq \frac{|y-x|^2}{2!}\frac{2}{k^3} = \frac{|y-x|^2}{k^3}.}$$

14. (a) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3>1$, donc convergente.

Pour tout $k \geq 1$ et $x \in J$, on a :

$$|g_k'(x)| = \left|\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}\right| = \frac{1}{(k+1+x)^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ étant convergente, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} g_k'(x)$ est absolument convergente par théorème de comparaison, donc convergente.

(b) Soit $(x,y) \in J^2$. Toujours par théorème de comparaison avec l'inégalité obtenue à la question 13., la série de terme général $(g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x))$ est absolument convergente. D'où par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left|f(y) - f(x) - (y-x)\sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} (g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left|(g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)\right| \\
&\leq |g_0(y) - g_0(x) - (y-x)g_0'(x)| + \sum_{k=1}^{+\infty} \left|(g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)\right| \\
&\leq |g_0(y) - g_0(x) - (y-x)g_0'(x)| + |y-x|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}
\end{aligned}$$

Pour $x \neq y$, on obtient en divisant par $|y-x|>0$:

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)\right| \leq \left|\frac{g_0(y)-g_0(x)}{y-x} - g_0'(x)\right| + |y-x| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Or on a $\displaystyle\lim_{y\to x} \frac{g_0(y)-g_0(x)}{y-x} = g_0'(x)$, de sorte que :

$$\lim_{y\to x} \left|\frac{g_0(y)-g_0(x)}{y-x} - g_0'(x)\right| + |y-x| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 0.$$

Par théorème des gendarmes, la limite $\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\sum_{k=0}^{+\infty}g_k'(x)\right|$ existe et vaut :

$$\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\sum_{k=0}^{+\infty}g_k'(x)\right|=0,$$

ce qui équivaut à :

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\sum_{k=0}^{+\infty}g_k'(x).$$

Ainsi f est dérivable en tout point $x\in J$, et donc sur J et on a :

$$\boxed{\forall x\in J,\ f'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.}$$

(c) On a :

$$f'(0)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\boxed{=-\frac{\pi^2}{12}.}$$

15. Il s'agit de faire apparaitre sur la courbe les différents éléments mis en évidence au cours du problème : f est décroissante, dérivable (ce qui signifie que graphiquement, la courbe de f ne doit pas présenter « d'angles »), tend vers $+\infty$ en -1 et vers 0 en $+\infty$.

D'autre part, elle vaut environ $0,69$ en 0 et $0,31$ en 1. Enfin, sa tangente en 0 possède un coefficient directeur qui vaut $-\frac{\pi^2}{12}$. Sans chercher à en calculer une valeur exacte, on peut grossièrement affirmer que ceci est compris entre $-\dfrac{3}{4}$ et -1, et donc on évitera d'avoir une tangente trop « plate » ou trop « pentue » en 0.