DS1

Devoir surveillé du 21/09/2023

Durée : 2h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans l'intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1} .

3. Justifier que pour tout $x \in J$,
$$\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases} .$$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Exercice 2

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n , telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

On admet dans la suite que le polynôme $P(x) = (x-1)^2(x-2)$ est annulateur de la matrice A (on ne demande pas de le vérifier).

2. (a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$, tel que :

$$x^n = PQ_n + R_n.$$

- (b) Montrer que pour tout entier naturel n , il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.$$

- (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1, b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.

3. Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de $I, A - I$ et $(A - I)^2$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n .

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n .

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

(a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

On se place désormais sous cette condition.

(b) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$.

(c) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{(n + 1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(d) En déduire que : $R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

(e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α , la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

(f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^n}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}.$$

(e) La série $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?