DS1

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Ecricome 2004)

1. On applique ici le théorème de la bijection à f.

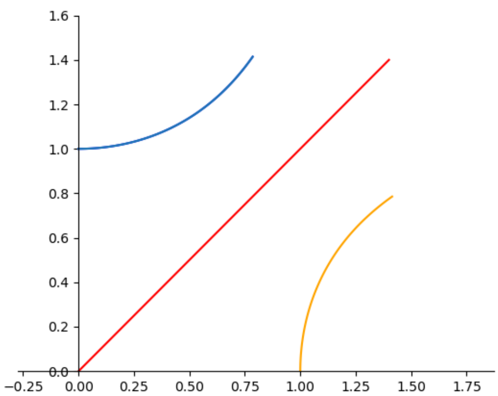
   - f est une fonction **continue sur** I comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   - f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a pour tout $x \in I$:

   $$f'(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

   Pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on a $f'(x) > 0$, et $f'(0) = 0$. La fonction f est donc **strictement croissante sur** I.

   Par le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur l'intervalle } J = f(I)}$ qui est $\boxed{[f(0), f(\pi/4)] = \left[1, 2/\sqrt{2}\right].}$

2. On trace l'allure de la courbe de f en utilisant que $f'(0) = 0$. La courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$.



Courbes de f et de f^{-1}.

Script `Python`.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#droite y = x
t = np.arange(0,1.5,0.1)
plt.plot(t,t,'red')

#courbe de f
x = np.linspace(0,np.pi/4,100)
y = 1/np.cos(x)
plt.plot(x,y,'blue')

#courbe de f^{-1}
plt.plot(y,x,'orange')
```

3. Pour tout $x \in J$:

   $$f \circ f^{-1}(x) = x.$$

   D'où en remplaçant :

   $$\frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = x$$

   On en déduit en passant à l'inverse (possible car $x \neq 0$ sur J) :

   $$\boxed{\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}.}$$

   Pour la deuxième égalité, on utilise que pour tout $y \in I$:

   $$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2(y) = 1 - \cos^2(y).$$

En prenant la racine carrée, on obtient :

$$\sin(y) = \pm\sqrt{1-\cos^2(y)}.$$

Et comme la fonction sin est positive sur $[0, \pi/4]$, on en déduit que :

$$\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}.$$

Enfin, avec $y = f^{-1}(x)$, on obtient bien l'égalité :

$$\boxed{\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1-\cos^2(f^{-1}(x))} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.}$$

4. Rappelons le théorème de dérivation de f^{-1} :

> **Rappel. Dérivabilité de la fonction réciproque.**
> Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J. Alors f^{-1} est dérivable sur J si, et seulement si, f est dérivable sur I et f' **ne s'annule pas** sur I. Et dans ce cas :
> $$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Ici f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur $I\backslash\{0\}$, donc $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \setminus \{f(0)\} = J \setminus \{1\}}$ et pour tout $x \in J \setminus \{1\}$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))} = \frac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}} \boxed{= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.}$$

5. Puisque f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2} \in J$, on sait alors que f^{-1} admet un $DL_1(\sqrt{2})$ et que celui-ci est :

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + (f^{-1})'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) + o((x-\sqrt{2})).$$

Or $f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient le DL :

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}) + o((x-\sqrt{2})).}$$

Exercice 2 (Edhec 2003)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, calculons :

$$AX_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ du_{n+2} + eu_{n+1} + fu_n \\ gu_{n+2} + hu_{n+1} + iu_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$X_{n+1} = AX_n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ u_{n+2} = du_{n+2} + eu_{n+1} + fu_n \\ u_{n+1} = gu_{n+2} + hu_{n+1} + iu_n \end{cases}.$$

On peut donc poser $\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de x^n par $P \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$: il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes tel que :

$$\boxed{x^n = P \times Q_n + R_n \quad \text{avec} \quad \deg(R_n) < \deg(P) = 3.}$$

(b) La famille $\mathscr{B} = (1, x-1, (x-1)^2)$ est libre car échelonnée en degrés, de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$. C'est donc une base de l'espace $\mathbb{R}_2[x]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $R_n \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe des réels a_n, b_n et c_n (uniques) tels que :

$$\boxed{R_n(X) = a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x^n = P \times Q_n + a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2 \tag{$*$}$$

Rappelons que $P = (x-1)^2(x-2)$. P est ici sous forme scindée, ses racines sont 1 et 2 de multiplicités respectives 2 et 1. En particulier, on a $P(1) = P'(1) = 0 = P(2)$.

En évaluant $(*)$ en $x = 2$, on obtient :

$$2^n = \underbrace{P(2)}_{=0} Q_n(2) + a_n + b_n + c_n = a_n + b_n + c_n.$$

En évaluant $(*)$ en $x = 1$, on obtient :

$$1 = \underbrace{P(1)}_{=0} Q_n(1) + a_n = a_n.$$

Dérivons à présent $(*)$:

$$nX^{n-1} = (P'Q_n + PQ_n') + b_n + 2c_n(X-1).$$

Évaluons cette dernière égalité en $x = 1$:

$$n = (\underbrace{P'(1)}_{=0} Q_n(1) + \underbrace{P(1)}_{=0} Q_n'(1)) + b_n = b_n.$$

On obtient donc $\boxed{a_n = 1,\ b_n = n \text{ et } c_n = 2^n - a_n - b_n = 2^n - n - 1.}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en substituant A à x dans la relation $(*)$:

$$A^n = \underbrace{P(A)}_{=0_n} \times Q_n(A) + a_n I + b_n(A-I) + c_n(A-I)^2 \boxed{= I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2.}$$

4. Calculons $(A - I) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la dernière ligne de $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui nous permet d'obtenir la dernière ligne de A^n :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + (2^n - n - 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^n - n - 1 & -2^{n+1} + 3n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix}.}$$

5. (a) Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Init. Pour $n = 0$, on a d'après l'énoncé $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où la propriété pour $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. Montrons là au rang $n+1$:

$$X_{n+1} \overset{1.(a)}{=} AX_n \overset{H.R.}{=} A \left(A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. Par principe de récurrence, on obtient bien que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

(b) Dans la relation de la question précédente, identifions les dernières lignes : le coefficient à la dernière ligne de X_n est u_n, et il s'obtient à partir de la 3-ème ligne de A^n (que nous avons déterminé précédemment) et du vecteur X_0. Autrement dit :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ 2^n - n - 1 & -2^{n+1} + 3n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 2^n - n - 1 + (-2^{n+1} + 3n + 2) \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - n - 1 + (-2^{n+1} + 3n + 2) = -2^n + 2n + 1.}$$

Exercice 3 (Ecricome 2020)

1. (a) $\boxed{\text{La série de Riemann } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1.}$

(b) Soit $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $t \geq k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{k^\alpha}(k+1-k) = \frac{1}{k^\alpha}.$$

De même, pour $t \in [k-1, k]$ on a $t \leq k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$. Par croissance de l'intégrale on obtient :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{k^\alpha}.$$

Finalement :

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t.}$$

(c) Soit $1 \leq n < N$ des entiers. Sommons les inégalités de la questions précédente pour $k = n+1, \ldots, N$. On obtient (à l'aide de la relation de Chasles pour les intégrales) :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Calculons (en notant que $\alpha > 1$) :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \right]_{n+1}^{N+1} = \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

De même, $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_n^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ dans $(*)$, il suit (puisque tout converge) :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.}$$

(d) D'après la relation précédente, il suit que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leq 1.$$

Or, $\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$ existe et vaut 1. Ce qui se récrit : $\boxed{R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$

(e) Par définition, la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge à l'ordre 2 si, et seulement si, $\sum\limits_{n\geq1} R_{1,n}$ converge.

Or :

- $R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
- $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque $\alpha > 1$.
- $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui converge si, et seulement si, $\alpha - 1 > 1$, soit $\alpha > 2$.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq1} R_{1,n}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$. Ainsi $\boxed{\sum\limits_{n\geq1} u_n \text{ converge à l'ordre 2 si, et seulement si, } \alpha > 2.}$

(f) On a vu que la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge à l'ordre 1 si, et seulement si, $\alpha > 1$, et qu'elle converge à l'ordre 2 si, et seulement si, $\alpha > 2$.

On peut conjecturer que $\boxed{\sum\limits_{n\geq1} u_n \text{ converge à l'ordre } p \in \mathbb{N}^* \text{ si, et seulement si, } \alpha > p.}$

2. (a) Pour tout $n \geq 2$, on a $n^n \geq n^2$ et donc :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq1} u_n \text{ converge.}}$

(b) Pour tout $k \geq 3$, on a $k^k \geq 3^k$, et ainsi :

$$\boxed{\forall k \geq 3, \qquad 0 \leq u_k \leq \frac{1}{3^k}.}$$

Par la question précédente, $\sum u_k$ converge, et il en est de même de la série géométrique $\sum \frac{1}{3^k}$ (de raison $q = \frac{1}{3} \in]-1,1[$). En sommant les inégalités obtenues, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}.$$

Or :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \underbrace{\frac{1}{3^{n+1}}}_{1^{er}\text{ terme}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{n+1}}\frac{3}{2} = \frac{1}{2\times 3^n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2\cdot 3^n}.}$$

(c) $\sum \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} R_{1,n}$ converge. En d'autres termes, $\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$

En sommant les inégalités de la question précédente (toutes les séries en jeu convergent bien), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} = R_{2,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{4\cdot 3^n}$ par le calcul effectué à la question précédente. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4\cdot 3^n}.}$$

(d) On va procéder par récurrence sur p. Notons pour cela $\mathcal{A}(p)$ la propriété « la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p\cdot 3^n}$ ».

Init. On a déjà montré que la propriété est vraie pour $p = 1$ et $p = 2$ aux questions précédentes.

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $\mathcal{A}(p)$ vraie.

Par hypothèse de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p\cdot 3^n}.$$

$\sum \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} R_{p,n}$ converge. Autrement dit, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$.

De plus, en sommant les inégalités (toutes les séries en jeu convergent bien), il suit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k}.$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = R_{p+1,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p}\frac{1}{2.3^n} = \frac{1}{2^{p+1}3^n}$. On obtient donc :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{p+1,n} \leq \frac{1}{2^{p+1}3^n}.$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Par principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } p \geq 1, \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p}$ et que :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}.}$$

(e) D'après la question précédente, on dispose de l'inégalité suivante pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{2^n 3^n} = \frac{1}{6^n}.$$

$\sum \frac{1}{6^n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{6} \in]-1,1[$. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 1} R_{n,n} \text{ converge.}}$
