DM8

Devoir maison à rendre le 08/01/2024

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a donc : $\langle x, y\rangle = {}^tXY$ où X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathscr{B}$.
Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note $f^\star$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

I. Quelques propriétés de $f^\star$.

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^\star(y)\rangle$.
2. Montrer que $f^\star$ est le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$
3. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f.
   (a) Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$, calculer $\langle x, f^\star(y)\rangle$.
   (b) En déduire que $F^\perp$ est stable par $f^\star$.

II. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathscr{E}$.

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme
$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$
où $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

4. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
5. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $f_u^\star$ appartient à $\mathscr{E}$.
6. On note $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$ et $\mathscr{D}$ la droite de vecteur directeur e_1.
   (a) Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathscr{E}$.
   (b) En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathscr{D}$ est stable par f_u.
   (c) Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathscr{D}^\perp$ est stable par f_u.

(d) Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathscr{D}^{\perp}$ et que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

(e) Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathscr{B}'$ est de la forme

$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$$

où e, f, g, h, ℓ sont des réels.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$

On dit qu'un endomorphisme h est nilpotent quand il existe un entier naturel p tel que h^p soit l'endomorphisme nul.

L'objectif de ce problème est de montrer que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre est nilpotent.

1. (a) Vérifier que -1 et 2 sont des valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés.

   (b) On suppose que f est diagonalisable.
   En étudiant la trace de A, aboutir à une contradiction.
   Que peut-on en déduire sur f ?

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right)$ et que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right)$.

3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right)$.

Pour simplifier les notations, on note dorénavant

$$F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \text{ et } G = \mathrm{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right).$$

4. Montrer que F et G sont stables par f.

5. On note $P = (X + 1)^2(X - 2)$. Justifier que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

On note dorénavant $\pi_1 = \frac{1}{9}(f + \mathrm{Id})^2$ et $\pi_2 = -\frac{1}{9}(f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})$.

6. Justifier que les endomorphismes π_1 et π_2 commutent.

7. (a) Que vaut l'endomorphisme $\pi_2 \circ \pi_1$?

   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.

8. (a) Montrer que $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$.

   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.

9. Justifier que $\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Im}(\pi_1)$ et que $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2)$.

10. Déduire des questions 7a et 8a que π_1 et π_2 sont des projecteurs.

11. Montrer que π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F. Identifier π_1.

On pose maintenant
$$g = 2\pi_1 - \pi_2 \text{ et } h = f - g.$$

12. Justifier que g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f.

13. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de g dans cette base soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Montrer que $h = (f - 2\mathrm{Id}) \circ \pi_1 + (f + \mathrm{Id}) \circ \pi_2$.
    En déduire que $h^2 = 0$.

15. Conclure.

Problème

Les variables aléatoires introduites dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Dans tout le problème, on considère X une variable aléatoire à valeurs positives, et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X.

On note pour tout entier $n \geq 2$, $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :
$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance et s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

Si la loi de X est implosive, on appelle **indice d'implosion de** X le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

On notera F la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition de Y_n pour tout entier $n \geq 2$.

Dans le cas où X (respectivement Y_n) admet une densité, on la notera f (resp. f_n).

Partie A - Résultats préliminaires

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la fonction de répartition de Y_n est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n\,.$$

2. On suppose dans cette question que X admet une densité f. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, Y_n admet une densité f_n et que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1}\,.$$

3. On souhaite prouver dans cette question que pour une variable aléatoire positive V admettant une densité φ continue sur $\mathbb{R}_+$ et dont on note la fonction de répartition Φ, on a l'équivalence suivante :

$$V \text{ admet une espérance } \iff \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\, dt \text{ converge,}$$

et qu'on a dans ce cas :

$$E(V) = \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\, dt.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t - x(1-\Phi(x)).$$

   (b) On suppose que V admet une espérance. Montrer que $x\,(1-\Phi(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
   En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\, dt$ converge.

   (c) On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\, dt$ converge. Montrer que V admet une espérance.

   (d) Conclure.

On admet que le résultat de la question 3 reste vrai si la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en un nombre fini de points.

Partie B - Quelques exemples

4. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{\alpha}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Déterminer le réel α.

   (b) Donner la fonction de répartition F de X.

   (c) Déterminer la fonction de répartition F_2 de Y_2 et justifier que Y_2 admet une densité f_2, que l'on calculera.

   (d) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

   (e) En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

   (f) En déduire que la loi de X est implosive et donner son indice d'implosion.

5. On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

   (a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

   (c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $F(k) = P(X \leqslant k)$.

   (d) Déterminer la loi de Y_2. Admet-elle une espérance ?

   (e) Déterminer la loi de Y_3. Admet-elle une espérance ?

   (f) La loi de X est-elle implosive ? Si oui, quel est son indice d'implosion ?

Partie C - Loi implosive d'indice fixé

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il, pour tout entier naturel $m \geq 2$, une loi qui est implosive et d'indice d'implosion égal à m ?* »

6. Soit $\alpha > 1$.

   (a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

   soit une densité de probabilité.

   (b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

   Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (c) Discuter, en fonction de α, l'existence de l'espérance de X.

   (d) Discuter, en fonction de n et de α, l'existence de l'espérance de Y_n.

   (e) Répondre à la question posée.

Partie D - Lois non implosives

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il des variables aléatoires positives qui n'admettent pas d'espérance et dont la loi n'est pas implosive ?* »

7. (a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{a}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

   soit une densité de probabilité.

   (b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

   Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

   (d) Discuter l'existence de l'espérance de Y_n.

   (e) Répondre à la question posée.

Partie E - Variables implosant sur une autre

Soit Y une variable aléatoire positive admettant une espérance. On dit que **la variable aléatoire X implose sur Y** si X est implosive et si, en notant m son indice d'implosion, Y_m est de même loi que Y.

8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que Y_n a la même loi que Y. À l'aide de la formule de la question **A.1**, exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de Y.

9. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire X implosive qui implose sur Y.

10. Soit m un entier tel que $m \geq 2$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y admettant une espérance et une variable aléatoire X implosive d'indice d'implosion m qui implose sur Y.

    On pourra s'inspirer des résultats de la partie C).

11. Soit Y une variable aléatoire positive admettant une densité g. On note G sa fonction de répartition.

    Soit m un entier tel que $m \geq 2$. Montrer que s'il existe une variable aléatoire X implosive, d'indice d'implosion m, qui implose sur Y, alors pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq m$, il existe une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion k, qui implose sur Y.

Partie F - Variables explosives

On pose pour tout entier $n \geq 2$, $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On dit que **la loi de X est explosive** s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance. Si la loi de X est explosive, on appelle **indice d'explosion** de X le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance.

12. Pour un entier m donné, existe-t-il des variables aléatoires de loi explosive dont l'indice d'explosion est m ?

13. Existe-t-il des variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives ?