DM8

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Ecricome 2006)

I. Quelques propriétés de $f^\star$.

1. On a $\langle f(x), y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^{Xt}AY = {}^tX\left({}^tAY\right)$ $\boxed{= \langle x, f^*(y)\rangle\,.}$

2. Soit g un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $\forall (x,y) \in \left(\mathbf{R}^3\right)^2, \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$.

   Alors, d'après la question précédente, on a, pour tout $(x,y) \in \left(\mathbf{R}^3\right)^2$,

   $$\langle x, f^*(y)\rangle = \langle x, g(y)\rangle \Leftrightarrow \langle x, f^*(y)\rangle - \langle x, g(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, f^*(y) - g(y)\rangle = 0.$$

   En particulier, si $y \in \mathbf{R}^3$ et si $x = f^*(y) - g(y)$, alors
   $\langle f^*(y) - g(y), f^*(y) - g(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \|f^*(y) - g(y)\|^2 = 0 \Leftrightarrow f^*(y) - g(y) = 0 \Leftrightarrow f^*(y) = g(y)$.
   Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbf{R}^3$, on en déduit que $\boxed{f^* = g.}$

3. (a) Soit $x \in F$ et $y \in F^\perp$. Alors

   $$\langle x, f^*(y)\rangle = \langle \underbrace{f(x)}_{\in F}, \underbrace{y}_{\in F^\perp}\rangle \boxed{= 0.}$$

   (b) Si $y \in F^\perp$, alors la question précédente montre que pour tout $x \in F, \langle x, f^*(y)\rangle = 0$. Et donc $f^*(y) \in F^\perp$.
   Ainsi, $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } f^*.}$

II. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathscr{E}$.

4. Il est clair que $\mathscr{E} \subset \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$ par définition, et l'endomorphisme nul de $\mathbf{R}^3$ est dans $\mathscr{E}$ car sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M_{(0,0,0)}$.

   Soient f et g deux éléments de $\mathscr{E}$, dont les matrices dans la base $\mathscr{B}$ sont respectivement $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix}$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
   Alors la matrice de $\lambda f + g$ dans la base $\mathscr{B}$ est

   $$\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' & \lambda c + c' \\ \lambda c + c' & \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' & \lambda a + a' \end{pmatrix} = M_{\lambda(a,b,c)+(a',b',c')}.$$

   Et donc $\lambda f + g \in \mathscr{E}$.

   Ainsi, $\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right).}$

5. Soit $f_u \in \mathscr{E}$, où $u = (a,b,c)$. Alors la matrice de f dans la base canonique est

   $${}^tM_u = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = M_{(a,c,b)}.$$

   Et donc $\boxed{f_u^* \in \mathscr{E}.}$

6. (a) Soit $f_u \in \mathscr{E}$, avec $u = (a, b, c)$. Alors

$$M_u \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b+c \\ a+b+c \end{pmatrix} = (a+b+c) \frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, e_1 est un vecteur propre de f_u, et donc est un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathscr{E}$.

Remarque. On a plus précisément montré que e_1 est un vecteur propre de tous les éléments de $\mathscr{E}$ pour la valeur propre $(a + b + c)$.

(b) Soit $x \in \mathscr{D}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda e_1$.
Et donc $f_u(x) = \lambda f_u(e_1) = \lambda(a + b + c)e_1 \in \mathscr{D}$.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{D} \text{ est stable par } f_u.}$

(c) Notons que pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$, on a $(f^*)^* = f$, car si $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*) = {}^tM$ et donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}}((f^*)^*) = {}^t({}^tM) = M$.
En particulier, si $f_u \in \mathscr{E}$, alors d'après les résultats des questions 5 et 6.(b), $\mathscr{D}$ est stable par f_u^*. Mais alors, par la question 3.(b), $\boxed{\mathscr{D}^\perp \text{ est stable par } (f_u^*)^* = f_u.}$

(d) Puisque $\mathscr{D}$ est de dimension $1, \dim \mathscr{D}^\perp = 3 - 1 = 2$.
De plus, $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 0$, de sorte que $e_2 \in \mathscr{D}^\perp$ et $e_3 \in \mathscr{D}^\perp$.
De plus, e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre de $\mathscr{D}^\perp$, de cardinal 2 , et donc une base de $\mathscr{D}^\perp$.
Enfin, il est facile de vérifier que $\langle e_2, e_3 \rangle = 0$ et que $\|e_2\| = \|e_3\| = 1$, et donc (e_2, e_3) est une base orthonormée de $\mathscr{D}^\perp$.
Puisque $\|e_1\| = 1, e_1$ est une base orthonormée de $\mathscr{D}$.
Et alors $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormée de } \mathbf{R}^3}$, car concaténation d'une base orthonormée de $\mathscr{D}$ et d'une base orthonormée de $\mathscr{D}^\perp$.

(e) Puisque $\mathscr{D}$ est stable par f_u, $f_u(e_1) \in \mathscr{D}$. Et donc il existe un réel e tel que $f_u(e_1) = ee_1$.
De même, par stabilité de $\mathscr{D}^\perp$ par $f_u, f_u(e_2) \in \mathscr{D}^\perp$ et donc il existe deux réels f et h tels que $f_u(e_2) = fe_2 + he_3$.
Et de même, il existe g et ℓ tels que $f_u(e_3) = ge_2 + \ell e_3$.
Et donc la matrice de f_u dans la base $\mathscr{B}'$ est :

$$\boxed{N_u = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_u(e_1) & f_u(e_2) & f_u(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} .}$$

Exercice 2 (Ecricome 2022)

1. (a) • La matrice $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 puisque, en notant C_1, C_2, C_3 ses colonnes, C_1 et C_2 sont non colinéaires, et $C_3 = -C_1$. Ainsi, $A + I$ n'est pas inversible : -1 est une valeur propre de A (donc de f).
Par le théorème du rang, l'espace propre associé est de dimension 1.
De plus, comme $C_1 + C_3 = 0$, on a $(1, 0, 1) \in \text{Ker}(f + Id)$, et donc nécessairement $\boxed{\text{Ker}(f + Id) = \text{Vect}((1, 0, 1)).}$

• La matrice $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ n'est clairement pas inversible (une ligne nulle), et de rang 2 (les deux colonnes C_1 et C_2 forment déjà une famille libre).

Ainsi, 2 est une valeur propre de A (donc de f), et par le théorème du rang, l'espace propre associé est de dimension 1.
De plus, comme $C_2 + C_3 = 0$, on a $(0,1,1) \in \operatorname{Ker}(f - 2Id)$, et donc nécessairement $\boxed{\operatorname{Ker}(f - 2Id) = \operatorname{Vect}((0,1,1)).}$

(b) Supposons que f soit diagonalisable. Alors f admettrait une troisième valeur propre α telle que $\alpha \notin \{-1,2\}$ car $\dim(E(-1)) + \dim(E(2)) \neq 3$.

Dans ce cas, il existerait une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Les matrices A et D seraient donc semblables, donc elles auraient la même trace, alors $0 = 1 + \alpha$, donc $\alpha = -1$, ce qui est absurde.
Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$, alors $(f + \mathrm{Id})(x) = 0$. Calculons :

$$(f + \mathrm{Id})^2(x) = (f + \mathrm{Id})((f + \mathrm{Id})(x)) = (f + \mathrm{Id})(0) = 0.$$

D'où $x \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})^2$. Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right).}$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de $(f + \mathrm{Id})^2$ est $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1 .

Par théorème du rang, on a donc $\dim\left(\operatorname{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right) = 2\right.$.

Comme $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ est de dimension 1, il suit que $\boxed{\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}) \neq \operatorname{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right).}$

3.
- $((0,1,1))$ est une base de $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ d'après $1(a)$.
- En observant $(A + I_3)^2$, on a clairement que $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})^2 = \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$, et $((1,0,0),(0,0,1))$ fournit une base de $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})^2$.

Or, $((1,0,0),(0,0,1))$ est libre (deux vecteurs non colinéaires), et $(0,1,1)$ n'est pas combinaison linéaire de $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$.

Ainsi, $((0,1,1),(1,0,0),(0,0,1))$ est une famille libre, de $3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$ éléments, donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

Par concaténation de bases, $\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right).}$

4.
- Soit $x \in F$. Alors $f(x) = 2x$. Calculons :

$$(f - 2\,\mathrm{Id})(f(x)) = (f - 2\,\mathrm{Id})(2x) = 2(f - 2\,\mathrm{Id})(x) = 2(f(x) - 2x) = 0$$

par linéarité de $(f - 2\,\mathrm{Id})$. Ainsi, $f(x)$ appartient à F.

- Soit $x \in G$. Alors $(f + \mathrm{Id})^2(x) = 0$ et :

$$(f + \mathrm{Id})^2(f(x)) = (f + \mathrm{Id})^2 \circ f(x) = f \circ (f + \mathrm{Id})^2(x) = f((f + \mathrm{Id})^2(x)) = f(0) = 0$$

car f et $(f + \mathrm{Id})^2$ commutent. Ainsi, $f(x)$ appartient à G.
Ainsi $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont stables par } f.}$

Remarque. Une autre méthode consiste à remarque que f commute avec $f - 2\,\mathrm{Id}$ (qui est un polynôme en f). Par conséquent, le sous-espace $F = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est stable par f. On peut procéder de même avec le sous-espace G.

5. Soit $x \in E$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe (un unique couple) $(y, z) \in F \times G$ tels que $x = y + z$. Alors :

$$\begin{aligned} P(f)(x) &= (f + \mathrm{Id})^2[(f - 2\mathrm{Id})(y)] + (f - 2\mathrm{Id}) \left[(f + \mathrm{Id})^2(z) \right] \text{ car } (f + \mathrm{Id})^2 \text{ et } (f - 2\mathrm{Id}) \text{ commutent} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(f) \text{ est l'endomorphisme nul.}}$

6. Les endomorphismes π_1 et π_2 sont deux polynômes du même endomorphisme f, donc π_1 et π_2 commutent.

7. (a) Calculons

$$\pi_2 \circ \pi_1 = -\frac{1}{81}(f + 4\mathrm{Id}) \circ \left[(X + 1)^2(X - 2) \right] (f)$$

Or $(X + 1)^2(X - 2)(f)$ est l'endomorphisme nul d'après la question 5.
Ainsi, $\boxed{\pi_2 \circ \pi_1 \text{ est l'endomorphisme nul.}}$

(b) Soit $y \in \mathrm{Im}\,(\pi_1)$, il existe $x \in E$ tel que $y = \pi_1(x)$, donc $\pi_2(y) = \pi_2 \circ \pi_1(x) = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker}\,(\pi_2)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}\,(\pi_1) \subset \mathrm{Ker}\,(\pi_2).}$

8. (a) On a $\pi_1 + \pi_2 = \frac{1}{9}\left((f + \mathrm{Id})^2 - (f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})\right) = \frac{1}{9}\left(f^2 + 2f + \mathrm{Id} - (f^2 + 4f - 2f + 8\mathrm{Id})\right)$.
Ainsi, $\boxed{\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}.}$

(b) Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(\pi_2)$, on a donc $\pi_2(x) = 0$, donc d'après la question précédente $x = \pi_1(x) \in \mathrm{Im}\,(\pi_1)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\pi_2) \subset \mathrm{Im}\,(\pi_1).}$

9. Par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\pi_2) = \mathrm{Im}\,(\pi_1).}$ Mais comme π_1 et π_2 commutent, $\pi_1 \circ \pi_2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, donc on peut appliquer les mêmes arguments et on obtient $\boxed{\mathrm{Im}\,(\pi_2) = \mathrm{Ker}\,(\pi_1).}$

10. Calculons :

$$\pi_2^2 = \pi_2 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ (\mathrm{Id} - \pi_1) = \pi_2 - \pi_2 \circ \pi_1 = \pi_2.$$

On procède de même pour π_1. Ainsi, $\boxed{\pi_1 \text{ et } \pi_2 \text{ sont des projecteurs.}}$

11. Soit $x \in F$. Alors $\pi_2(x) = -\frac{1}{9} \circ (f + 4\,\mathrm{Id}) \circ (f - 2\,\mathrm{Id})(x) = 0$ car $F = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$. Donc $F \subset \mathrm{Ker}\,(\pi_2) = \mathrm{Im}\,(\pi_1)$.

Soit $x \in G$. Alors $\pi_1(x) = \frac{1}{9}(f - \mathrm{Id})^2(x) = 0$ car $G = \mathrm{Ker}\left((f - \mathrm{Id})^2\right)$. Donc $G \subset \mathrm{Ker}\,(\pi_1) = \mathrm{Im}\,(\pi_2)$.

Soit $x \in E$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe $(y, z) \in F \times G$ tels que $x = y + z$. Alors :

$$\pi_2(x) = \pi_2(y) + \pi_2(z) = 0 + z = z$$

car $y \in F \subset \mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $z \in G \subset \mathrm{Im}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_2 - \mathrm{Id})$ car π_2 est un projecteur. Ainsi, $\boxed{\pi_2 \text{ est le projecteur sur } G \text{ parallèlement à } F.}$

En procédant de même, $\pi_1(x) = y$, et $\boxed{\pi_1 \text{ est le projecteur sur } F \text{ parallèlement à } G.}$

12. Par définition :

$$g = \frac{1}{9}\left(2(f + \mathrm{Id})^2 + (f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})\right) = \frac{1}{9}\left(3f^2 + 6f - 4\mathrm{Id}\right).$$

et

$$h = f - g = \frac{1}{9}\left(-3f^2 + 3f + 4\mathrm{Id}\right).$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ et } h \text{ sont des polynômes de l'endomorphisme } f.}$

13. On a déterminé à la question 3. une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que (e_1) est une base de F et (e_2, e_3) est une base de G.

    Les matrices respectives de π_1 et π_2 dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    Donc $\boxed{\text{la matrice de } g = 2\pi_1 - \pi_2 \text{ dans la base } (e_1, e_2, e_3) \text{ est } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$

14. Calculons :

$$(f - 2\mathrm{Id}) \circ \pi_1 + (f + \mathrm{Id}) \circ \pi_2 = f \circ (\pi_1 + \pi_2) - 2\pi_1 + \pi_2 = f \circ \mathrm{Id} - g \boxed{= h.}$$

    Puisque tous les endomorphismes en jeu commutent (ce sont tous des polynômes en f) :

$$h^2 = (f - 2\mathrm{Id})^2 \circ \pi_1^2 + 2(f - 2\mathrm{Id})(f + \mathrm{Id}) \circ \pi_1 \circ \pi_2 + (f + \mathrm{Id})^2 \circ \pi_2^2$$

    Or, $\pi_1 \circ \pi_2 = 0, \pi_1^2 = \pi_1$ et $\pi_2^2 = \pi_2$, donc :

$$h^2 = (f - 2\mathrm{Id})^2 \circ \pi_1 + (f + \mathrm{Id})^2 \circ \pi_2$$

    Et puisque $\mathrm{Im}\,(\pi_1) \subset \mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{Id})^2)$ et $\mathrm{Im}\,(\pi_2) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$, on obtient $\boxed{h^2 = 0.}$

15. Ainsi, h est nilpotent, g est diagonalisable et $f = g + h$ avec $g \circ h = h \circ g$ car g et h sont des polynômes en f d'après la question 12. f est donc la somme d'un endomorphisme nilpotent et d'un endomorphisme diagonalisable, les deux commutant.

Problème (Ecricome 2015)

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $[Y_n > x] = \bigcap_{1 \leq i \leq n} [X_i > x]$, et par indépendance des (X_i) :

$$\begin{aligned} P(Y_n > x) = P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} [X_i > x]\right) &= \prod_{1 \leq i \leq n} P(X_i > x) = \prod_{1 \leq i \leq n} (1 - P(X_i \leq x)) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1 - F(x)) = (1 - F(x))^n . \end{aligned}$$

    Ainsi :

$$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) \boxed{= 1 - (1 - F(x))^n .}$$

2. Si X admet une densité f, alors sa fonction de répartition F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, et continue sur $\mathbb{R}$. Par théorème d'opérations sur les applications $\mathscr{C}^1$ et continues, il en est de même pour :

$$F_n : x \mapsto 1 - (1 - F(x))^n.$$

    Donc Y_n est à densité. De plus, pour tout x où F est dérivable, on a :

$$F_n'(x) = nF'(x)\,(1 - F(x))^{n-1} = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1} .$$

    Donc une densité de Y_n est donnée par $\boxed{f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1}.}$

3. (a) Soit $x \geq 0$. Procédons à une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & \boxed{1-\Phi(t)} & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & -\Phi'(t) = -\varphi(t) & \overset{\int}{\longleftarrow} & \boxed{t} \end{array}$$

Les fonctions encadrées étant $\mathscr{C}^1$, l'intégration par partie est licite, et :

$$\int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t = [t(1-\Phi(t))]_0^x + \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = x(1-\Phi(x)) + \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t - x(1-\Phi(x)).}$$

(b) Pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq x(1-\Phi(x)) = x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} x\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $E(V)$ existe, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est le reste de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Par théorème des gendarmes, la limite $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(1-\Phi(x)) \text{ existe et vaut } 0.}$

De $\displaystyle\int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + x(1-\Phi(x))$, il découle alors que :

$$\int_0^x (1-\Phi(t))\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} E(V).$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\mathrm{d}t \text{ converge (et vaut } E(V)).}$

(c) Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$ converge. Pour tout $x \geq 0$, on a $-x(1-\Phi(x)) \leq 0$ de sorte que :

$$0 \leq \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t \overset{3.(a)}{=} \int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t - x(1-\Phi(x)) \leq \int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$$

car $1-\Phi(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ est croissante (car $t \mapsto t\varphi(t)$ est positive), et majorée par les inégalités ci-dessus. Elle admet donc une limite finie lorsque $x \to +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{E(V) \text{ existe (et vaut } \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\ \mathrm{d}t \text{ d'après (b)).}}$$

(d) En 3.(b), nous avons démontré une implication et en 3.(c) l'implication réciproque. On peut donc conclure que :

$$\boxed{E(V) \text{ existe si, et seulement si } \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

Et on a dans ce cas $\boxed{\displaystyle E(V) = \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t.}$

Pour aller plus loin.

Une propriété analogue peut être démontrée pour une variable V discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Voir à ce sujet l'Exercice 5.7 de TD.

Partie B

4. (a) Notons que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive si α est positif... ce que nous ne manquerons pas de vérifier. Montrons que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc I est une intégrale généralisée en $+\infty$. Et pour $A > 0$:

$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = [\alpha \arctan(t)]_0^A = \alpha \arctan(A).$$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \arctan(A) = \frac{\pi}{2}$, I converge, et vaut 1 si, et seulement si, $\alpha = \dfrac{2}{\pi}$. Et cette valeur est bien positive. Ainsi on prendra $\boxed{\alpha = \dfrac{2}{\pi}.}$

(b) Pour tout $x < 0$, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$. Pour $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\arctan(x)$$

par le calcul précédent. Ainsi :

$$\boxed{F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{2}{\pi}\arctan(x) & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(c) Par les questions 1. et 2., on sait que Y_2 est à densité et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^2 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\arctan(x)\right) & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(d) Soit $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Comme arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, g est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par composition. De plus, on a pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Donc g est constante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, égale à $g(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$. D'où l'égalité :

$$\boxed{\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

(e) Il découle de 4.(d) que pour tout $x > 0$:

$$\frac{2}{\pi}\arctan(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc que :

$$f_2(x) = \frac{8}{\pi^2(1+x^2)} \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, il suit : $\boxed{f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\pi^2 x^3}.}$

(f) $E(Y_2)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x f_2(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. Comme $x \mapsto x f_2(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :

- $x f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\pi^2 x^2}$.
- $\frac{8}{\pi^2 x^2} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$).

Par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} x f_2(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et donc que Y_2 admet une espérance.

D'autre part, on a $x f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi x}$. Par un raisonnement analogue, où cette fois l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge, on montre que X n'a pas d'espérance. Par définition, on a donc que :

$$\boxed{X \text{ est implosive et son indice d'implosion est } 2.}$$

5. (a) Soit $N \in \mathbb{N}$. Par un télescopage immédiat :

$$\sum_{k=0}^{N} P(X=k) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+2}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1.}$

(b) Commençons par chercher un équivalent de $P(X=k)$ en $+\infty$.

$$P(X=k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1 - \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1 - \sqrt{\frac{k+2-1}{k+2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{k+2}}\right).$$

Comme $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \alpha u$, on a $\sqrt{1 + \frac{-1}{k+2}} - 1 \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{-1}{k+2} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k}$. On en déduit que :

$$P(X=k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k\sqrt{k}}.$$

Il s'ensuit que $kP(X=k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. Par la règle des équivalents pour les séries à termes **positifs**, $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ est de même nature que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{k}}$, qui est une série de Riemann divergente ($\alpha = 1/2 < 1$). Ainsi, $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

(c) Comme en 5.(a), toujours par télescopage, on obtient pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{i+1}} - \frac{1}{\sqrt{i+2}} \boxed{= 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.}$$

(d) Tout d'abord, $Y_2(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la question 1 :

$$P(Y_2 \leq k) = 1 - (1 - F(k))^2 = 1 - \frac{1}{k+2},$$

formule également valable pour $k = -1$.

Comme $[Y_2 \leq k] = [Y_2 = k] \cup [Y_2 \leq k-1]$ avec incompatibilité des événements $[Y_2 = k]$ et $[Y_2 \leq k-1]$, on obtient :

$$P(Y_2 = k) = P(Y_2 \leq k) - P(Y_2 \leq k-1) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Ainsi : $\boxed{Y_2(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_2 = k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.}$

Par conséquent, $kP(Y_2 = k) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k}$, et par le critère des équivalents pour les séries à terme général **positif**, puisque $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente, $\sum_{k \geq 0} kP(Y_2 = k)$ diverge. Ainsi, $\boxed{Y_2 \text{ n'a pas d'espérance.}}$

(e) On a $Y_3(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la question 1 :

$$P(Y_3 \leq k) = 1 - (1 - F(k))^3 = 1 - \frac{1}{(k+2)^{3/2}},$$

formule aussi valable pour $k = -1$. On en déduit que :

$$P(Y_3 = k) = P(Y_3 \leq k) - P(Y_3 \leq k-1) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}.$$

Ainsi : $\boxed{Y_3(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_3 = k) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}.}$

On a $P(Y_3 = k) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{3}{2k^{5/2}}$, par un raisonnement analogue à 5.(b) (dont je vous laisse le soin d'écrire les détails). Par conséquent, on a $kP(Y_2 = k) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{3}{2k^{3/2}}$, et par le critère des équivalents pour les séries à terme général **positif**, puisque $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum_{k \geq 0} kP(Y_3 = k)$ converge. Ainsi $\boxed{Y_3 \text{ admet une espérance.}}$

(f) Les trois résultats précédents montrent que : $\boxed{X \text{ est implosive, d'indice d'implosion 3.}}$

Partie C

6. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 1, et est positive à condition que a soit positif. Montrons que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = a \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge et calculons sa valeur. La fonction intégrée étant continue sur $[1, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Soit $A \geq 1$. Alors :

$$\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{a}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^A = \frac{a}{\alpha-1} - \frac{a}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{a}{\alpha-1} \quad \text{car } \alpha - 1 > 0.$$

En prenant $\boxed{a = \alpha - 1}$, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, positive sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ valant 1. C'est donc une densité de probabilité.

(b) En reprenant le calcul précédent, on a : $\boxed{F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} & \text{sinon.} \end{cases}}$

(c) Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ se réduit à l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}x$, on a directement que $\boxed{E(X) \text{ existe si, et seulement si, } \alpha > 2.}$

(d) Par 1., une densité f_n de Y_n est donnée par :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto nf(x)(1-F(x))^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{na}{x^\alpha}\dfrac{1}{(x^{\alpha-1})^{n-1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

$E(Y_n)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} \frac{na}{(x^{\alpha-1})^n}\,\mathrm{d}x$ converge (absolument), la fonction intégrée étant positive. On reconnait ici une intégrale de Riemann en $+\infty$ qui converge si et seulement si $n(\alpha-1) > 1$, soit $\alpha > 1 + \dfrac{1}{n}$. Ainsi,

$$\boxed{E(Y_n) \text{ existe si, et seulement si, } \alpha > 1 + \frac{1}{n}.}$$

(e) Pour que X soit implosive d'indice $m \geq 2$ donné, il faut et suffit que $1+\dfrac{1}{m} < \alpha \leq 1+\dfrac{1}{m-1}$. $\alpha = 1 + \dfrac{1}{m-1}$ convient (par exemple).

Ainsi, pour tout $m \geq 2$, $\boxed{\alpha = 1 + \dfrac{1}{m-1} \text{ donne une variable } X \text{ implosive d'ordre } m.}$

Partie D

7. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 2, et est positive à condition que a le soit. Montrons que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = a\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)^2}$ converge et calculons sa valeur. La fonction intégrée étant continue sur $[2,+\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Soit $A \geq 2$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^2}$ (du type $\dfrac{u'}{u^2}$) sur $[\,2\,;\,+\infty\,[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{\ln(x)}$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-a}{\ln(A)} + \frac{a}{\ln(2)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{a}{\ln(2)}.$$

Alors avec $\boxed{a = \ln(2)} \geq 0$, I converge et vaut 1, de sorte que f est une densité de probabilité.

(b) Par le calcul précédent : $\boxed{F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} & \text{sinon.} \end{cases}}$

(c) X admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{+\infty} \frac{\ln(2)}{\ln(x)^2}\,\mathrm{d}x$ converge (absolument), la fonction intégrée étant positive. Pour tout $x \geq 2$:

$$\frac{1/x}{xf(x)} = \frac{\ln(x)^2}{x\ln(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

de sorte que $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\,(xf(x))$. Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge, le critère de négligeabilité pour ces fonctions **positives** assure la divergence de $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

(d) D'après la question 1, une densité de Y_n est donnée, pour $x \geq 2$, par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n\dfrac{\ln(2)}{x\ln^2(x)}\left(\dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} n\dfrac{\ln^n(2)}{x\ln^{n+1}(x)} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Or $\dfrac{1/x}{xf_n(x)} = \dfrac{\ln^{n+1}(x)}{xn\ln^n(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ce qui s'écrit également $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(xf_n(x)\right)$. On conclut comme dans la question précédente que $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2,\ Y_n \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

(e) X est une variable positive ($X(\Omega) = [2, +\infty[$) sans espérance et pour laquelle aucune des variables Y_n n'a d'espérance. $\boxed{X \text{ n'est pas implosive.}}$

Partie E

8. On note F_Y la fonction de répartition de Y, et F celle de X. Par la question 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(x) = 1 - (1 - F(x))^n \Leftrightarrow (1 - F(x))^n = 1 - F_Y(x) \Leftrightarrow 1 - F(x) = (1 - F_Y(x))^{1/n}$$

On peut conclure que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 1 - (1 - F_Y(x))^{1/n}.}$

9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $1 - F_Y(k) = P(Y > k) = (1-p)^k$ car il s'agit de la probabilité d'obtenir que des échecs sur les k premières expériences de Bernoulli (on pouvait aussi calculer cette probabilité à l'aide d'une somme).

S'il existe une variable X implosant sur Y à l'ordre m, on aurait (en notant toujours F la fonction de répartition de X) :

$$F(k) = 1 - (1-p)^{k/m} = 1 - \left[(1-p)^{1/m}\right]^k.$$

Cette formule est de plus valable pour $k = 0$. On obtient alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = F(k) - F(k-1) = \left[(1-p)^{1/m}\right]^{k-1} - \left[(1-p)^{1/m}\right]^k = \left[(1-p)^{1/m}\right]^{k-1}(1 - (1-p)^{1/m}).$$

Donc X suit la loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^{1/m}$. Mais X n'est alors pas implosive, car elle possède une espérance. Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de variable } X \text{ implosant sur } Y.}$

10. Soit $\alpha = 1 + \dfrac{1}{m-1}$, X de loi décrite dans la partie C, Y de même loi que Y_m. Alors par les résultats de la partie C, $\boxed{X \text{ implose sur } Y \text{ avec un indice d'implosion } m.}$

11. Par hypothèse et d'après la question 1 (avec F la fonction de répartition de X) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = 1 - (1 - F(x))^m.$$

Fixons $2 \leq k \leq m$. Construisons une variable aléatoire X' implosive, d'indice d'implosion k, qui implose sur Y.

Étape 1. Définition de la loi de X'.

Posons H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = 1 - (1 - F(x))^{m/k}$. On vérifie que H est une fonction de répartition d'une variable à densité :

- H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en un nombre fini de points car F l'est.
- H est de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.

- F étant croissante, $1-F$ est décroissante, donc $(1-F)^{m/k}$ aussi, et du coup H est croissante.

Soit X' une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition H.

Étape 2. X' implose sur Y, d'indice d'implosion k.
Pour tout $1 \leq i \leq k$, on note Y_i' la variable $\min(X_1', \ldots, X_i')$ où $X_1', \ldots, X_k'$ sont de même loi que X' et indépendantes.

- Par la question 1, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$F_{Y_k'}(x) = 1 - (1 - H(x))^k = 1 - (1 - F(x))^m = G(x).$$
Donc Y_k' suit la même loi que Y.
- Puisque X implose sur Y, Y possède une espérance. Il en est donc de même de Y_k'.
- Soit $1 \leq i < k$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$F_{Y_i'}(x) = 1 - (1 - H(x))^i = 1 - (1 - F(x))^{mi/k} \quad \Rightarrow \quad 1 - F_{Y_i'}(x) = (1 - F(x))^{mi/k}.$$
Or on a $\dfrac{mi}{k} \leq m\dfrac{k-1}{k} \leq m - \dfrac{m}{k} \leq m - 1$ (puisque $\dfrac{m}{k} \geq 1$). Et comme $0 \leq 1 - F(x) \leq 1$, on a :
$$1 - F_{Y_i'}(x) \geq (1 - F(x))^{m-1} \geq 0.$$
Utilisons les résultats de la question 3. Puisque $E(Y_{m-1})$ n'existe pas (car X est d'indice d'implosion m), $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(x))^{m-1} \,\mathrm{d}x$ diverge. Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - F_{Y_i'}(x) \,\mathrm{d}x$ diverge également. Ainsi, toujours par la question 3., $E(Y_i')$ n'a pas d'espérance.
- En particulier pour $i = 1$, $Y_1' = X'$ n'a pas d'espérance.

Ainsi X' est implosive, implose sur Y, avec un indice d'implosion valant k. On a donc montré que $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![2, m]\!], \text{ il existe } X' \text{ implosant sur } Y, \text{ d'indice } k.}$

Partie F

12. L'énoncé est peut-être un peu vague. X est a priori positive d'après le début de l'énoncé. Doit-on supposer que X admet une espérance dans la définition de l'explosivité ? Voici une réponse pour les deux cas.

    - Si X n'a pas d'espérance, alors $0 \leq X \leq Z_n$ entraîne que Z_n n'a pas d'espérance (sinon, X admettrait une espérance par domination). Dans ce cas, son indice d'explosivité est $m = 2$.
    $$\boxed{\text{Si } X \text{ n'admet pas d'espérance, alors } X \text{ est explosive d'indice } 2.}$$
    - Si X possède une espérance, alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance par linéarité. Or :
    $$0 \leq Z_n \leq X_1 + \cdots + X_n,$$
    ce qui entraîne que Z_n admet une espérance par domination. Ceci étant vrai pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X n'est pas explosive.
    $$\boxed{\text{Si } X \text{ admet une espérance, alors } X \text{ n'est pas explosive.}}$$

    On peut en outre conclure que :
    $$\boxed{\text{Si } m \geq 3, \text{ il n'existe pas de variable explosive d'indice } m.}$$

13. D'après ce qui précède, toute variable positive possédant une espérance fait l'affaire... et comme il en existe (lois exponentielle, γ, binomiale, géométrique, de Poisson...), on peut donc conclure que :
$$\boxed{\text{Il existe des variables qui ne sont pas explosives.}}$$