DM7

# Devoir maison à rendre le 07/12/2023

## Exercice 1

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère une variable aléatoire $X$ suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $Y = \sqrt{X}$.

1. On suppose avoir importé en `Python` les librairies `numpy` et `numpy.random` à l'aide des préfixes `np` et `rd` respectivement. On rappelle que la commande `rd.exponential(1/lambda` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

   Écrire une (ou des) commande(s) `Python` utilisant `rd.exponential` et permettant de simuler $Y$.

2. (a) Déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.

   (b) En déduire une densité $f_Y$ de $Y$.

3. (a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire $Z$ suivant la loi normale centrée réduite.

   (b) En déduire que $Y$ possède une espérance et donner sa valeur.

4. On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.

   (a) Vérifier que $U(\Omega) = [0, 1[$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition $F_U$ de $U$ et reconnaître la loi de $U$.

   (c) Exprimer $X$ en fonction de $U$, puis en déduire une simulation `Python` de $Y$ utilisant uniquement la fonction `rd.random`.

---

## Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes $P$, $Q$ appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$u_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \ln(x) \end{array} \right.$$

Pour toute fonction $f$ appartenant à $E$, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on note $\varphi$ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ (*c'est-à-dire que $E$ est l'espace vectoriel engendré par les fonctions* $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$).

$\boxed{\text{On admettra que la famille } \mathscr{B} = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \text{ est une base de } E.}$

2. Justifier que chaque fonction $f$ de $E$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.

3. Démontrer que $\varphi$ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.

4. Écrire la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}$.

5. L'endomorphisme $\varphi$ est-il bijectif ? Quelles sont ses valeurs propres ?

6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de $\varphi$ associé à la valeur propre $\lambda$. On suppose que $\lambda$ est non nul et on considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = x^{-1/\lambda} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $g$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'expression de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ puis celle de $f$.

7. Pour chaque valeur propre $\lambda$ de $\varphi$, déterminer la dimension de l'espace propre de $\varphi$ associé à la valeur propre $\lambda$.

(Cube) L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?

---

## Exercice 3

Dans tout l'exercice, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit $A$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent $-n$, les autres valant tous 1. On note $J$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1, et $I$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Exprimer $A$ comme combinaison linéaire de $J$ et de $I$, puis faire de même pour $A^2$.

   (b) En déduire un polynôme annulateur de $A$ puis donner les valeurs propres possibles de $A$.

   (c) Montrer que $A$ est inversible.

Dans la suite, on considère un espace euclidien $E$, de dimension $n+1$, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$.

On note $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de $E$ et on pose : $\quad u = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k.$

On pose aussi : $\quad \forall i \in [\![0, n]\!],\ e_i = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\,(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle\, u)$

2. Calculer la norme du vecteur $u$.

3. (a) Montrer que pour tout $i$ de $[\![0, n]\!]$, on a : $\|e_i\| = 1$.

   (b) Montrer également que pour tout couple $(i, j)$ d'entiers distincts de $[\![0, n]\!]$, on a :

$$\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}.$$

(c) Montrer que $\varphi : x \in E \mapsto \langle x, u \rangle$ est une forme linéaire non nulle sur $E$. En déduire la dimension de $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

(d) Montrer que les vecteurs $e_0, e_1, \ldots, e_n$ appartiennent à $F$.

(e) Montrer en utilisant la question 1.(c) que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $F$.

4. On considère l'application $f$ de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in F \times F, \quad f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle .$$

(a) Montrer que $f$ est une forme bilinéaire symétrique.

(b) Pour tout couple $(i, j)$ de $[\![1, n]\!]^2$, déterminer $f(e_i, e_j)$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.

(c) En déduire que : $\quad \forall (x, y) \in F \times F, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle = \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle$.

(d) En déduire également que pour tout $x$ de $F$, on a : $\quad \|x\|^2 = \displaystyle\frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$.

---