DM7

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Edhec 2018)

1. On peut utiliser les commandes suivantes :

```python
X = rd.exponential(2)
Y = np.sqrt(X)
print(Y)
```

2. (a) Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1/2)$, elle admet pour densité :

$$f_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, et donc Y est bien définie et $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $x < 0$:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0.$$

À présent, pour $x \geq 0$:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(b) Notons tout d'abord que F_Y est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$ en tant que composée de telles fonctions. En 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0) = \lim_{x \to 0^+} F_Y(x).$$

Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ pour les mêmes raisons. Donc Y est une variable à densité.

Pour tout $x \neq 0$:

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Une densité de Y est (avec un choix arbitraire pour la valeur en 0) :

$$\boxed{f_Y : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t > 0. \end{cases}}$$

3. (a) Si $Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0, 1)$, alors Z admet un moment d'ordre 2, donné par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = E(Z^2) \underset{\text{F. de Huygens}}{=} V(Z) + E(Z)^2 = 1 + 0^2 \boxed{= 1.}$$

(b) Puisque $t \mapsto \dfrac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est positive et paire, on déduit de la question précédente que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ converge absolument et vaut $\dfrac{1}{2}$. Par linéarité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Y(t)\, \mathrm{d}t$ converge absolument également, et vaut $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Ainsi $\boxed{E(Y) \text{ existe et vaut } E(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$

4. (a) Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et que $x \mapsto 1 - e^{-\frac{x}{2}}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1[$, on obtient $\boxed{U(\Omega) = [0, 1[.}$

(b) Puisque $U(\Omega) = [0, 1[$, il suit que $F_U(x) = 1$ pour tout $x \geq 1$ et $F_U(x) = 0$ pour tout $x < 0$.

Pour $x \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(1 - e^{-X/2} \leq x) = P(1 - x \leq e^{-X/2}) \\ &= P(\ln(1-x) \leq -\frac{X}{2}) \quad \text{car ln croissant et } 1 - x > 0 \\ &= P(X \leq -2\ln(1-x)) = 1 - e^{\ln(1-x)} = x. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

$\boxed{U \text{ suit donc une loi uniforme sur } [0, 1[.}$

(c) Partant de $U = 1 - e^{-X/2}$, on obtient après calculs $\boxed{X = -2\ln(1-U)}$. On peut utiliser les commandes suivantes pour simuler la variable Y.

```python
U = rd.random()
X = -2*np.log(1-U)
Y = np.sqrt(X)
print(Y)
```

Exercice 2 (Ecricome 2014)

1. Pour cela, montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$:

- La fonction nulle $f : x \mapsto 0 = x \times 0 + x\ln(x) \times 0$ appartient bien à E (en prenant $P = Q = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[x]}$.
- Pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, pour tout $f_1, f_2 \in E$, il existe $(P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}_{n-1}[x])^4$ tels que :

$$f_1 : x \mapsto xP_1(x) + x\ln(x)Q_1(x) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto xP_2(x) + x\ln(x)Q_2(x).$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1(xP_1(x) + x\ln(x)Q_1(x)) + \lambda_2(xP_2(x) + x\ln(x)Q_2(x)) \\ &= x\underbrace{(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[x]}(x) + \lambda_2 x\ln(x)\underbrace{(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[x]}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ appartient bien à E.

E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. En particulier, $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$

Montrons que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ par double inclusion.

- $\subset$ Soit $f \in E$. Il existe $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tels que :

$$f : x \mapsto xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

Écrivons $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ et $Q = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + x\ln(x)(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}) \\ &= a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_{n-1}x^n + b_0x\ln(x) + b_1x^2\ln(x) + \cdots + b_{n-1}x^n\ln(x) \\ &= a_0u_1(x) + a_1u_2(x) + \cdots + a_{n-1}u_n(x) + b_0v_1(x) + b_1v_2(x) + \cdots + b_{n-1}v_n(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $f = a_0u_1 + a_1u_2 + \cdots + a_{n-1}u_n + b_0v_1 + b_1v_2 + \cdots + b_{n-1}v_n$ appartient bien à $\text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$. D'où la première inclusion.

- $\supset$ Pour tout $i = 1, \dots n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u_i(x) = x^i = x \times x^{i-1} + x\ln(x) \times 0 \in E,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad v_i(x) = x^i\ln(x) = x \times 0 + x\ln(x) \times x^{i-1} \in E,$$

car 0 et x^{i-1} appartiennent à $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Ainsi $u_i, v_i \in E$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et comme de plus E est un espace vectoriel :

$$\text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \subset E.$$

On peut donc conclure que $\boxed{E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).}$

2. Pour tout $f \in E$, il existe $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tels que :

$$f : x \mapsto xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

Or $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} xP(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x\ln(x)Q(x) = 0$ par croissances comparées. D'où par somme, $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x) = 0$. La $\boxed{\text{fonction } f \text{ peut donc être prolongée par continuité en } 0}$ en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\tilde{f}(0) = 0$.

En particulier, pour tout $f \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie pour tout $x > 0$. En effet, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0. Cette intégrale est donc faussement impropre en 0, donc convergente. Ainsi l'intégrale définissant $\varphi(f)$ est bien convergente.

Pour tout $k = 1, \dots, n$, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x u_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}u_k(x).$$

Ainsi $\boxed{\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k}$.

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$: $\displaystyle\frac{1}{x}\int_\varepsilon^x v_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_\varepsilon^x t^k\ln(t)\,\mathrm{d}t.$

On procède à une intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, x]$:

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(t) & & t^k \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{t} & \xleftarrow{\int} & \dfrac{t^{k+1}}{k+1} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon, x]$. D'où par intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\int_{\varepsilon}^{x} v_k(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\left(\left[\ln(t)\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{\varepsilon}^{x} - \int_{\varepsilon}^{x}\frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\ln(x)\frac{x^{k+1}}{k+1} - \ln(\varepsilon)\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1} - \frac{x^k}{(k+1)^2} + \frac{\varepsilon^k}{(k+1)^2}\right) \\ &\underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\left(\ln(x)\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^k}{(k+1)^2}\right) \end{aligned}$$

par croissances comparées. Ainsi : $\boxed{\varphi(v_k) = \dfrac{1}{k+1}v_k - \dfrac{1}{(k+1)^2}u_k.}$

3. Pour tout $f, g \in E$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales en jeu convergent). Ainsi :

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

et $\boxed{\varphi \text{ est bien linéaire.}}$

Enfin, on a vu que pour tout $k = 1, \dots, n$, $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$ appartiennent bien à E. Pour tout $f \in E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$, il existe $\lambda_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ tels que :

$$f = \sum_{k=1}^{n}(\alpha u_k + \beta v_k).$$

Par linéarité de φ :

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha\varphi(u_k) + \beta\varphi(v_k)) \in E$$

car E est un espace vectoriel. Ainsi $\boxed{\varphi(f) \text{ appartient bien à } E.}$

4. On a obtenu $\varphi(u_k) = \dfrac{1}{k+1}u_k$ et $\varphi(v_k) = \dfrac{1}{k+1}v_k - \dfrac{1}{(k+1)^2}u_k$ pour tout $k = 1, \dots, n$. On peut donc compléter la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\boxed{A = M_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{3} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{n+1} & \frac{-1}{(n+1)^2} \\ 0 & & \cdots & & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}}.$$

5. A étant triangulaire supérieure, les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\varphi) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}\right\}.}$$

0 n'est pas valeur propre de φ, donc φ est un endomorphisme injectif de E qui est de dimension finie égale à $2n$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est bijectif}}$.

6. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$, et soit f un vecteur propre associé à λ. Posons :

$$g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{-1/\lambda} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x^{-k-1} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et montrons que g est constante. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par le théorème fondamental de l'analyse (on a utilisé une relation de Chasles pour s'y ramener, étant donné que l'intégrale est généralisée en 0). Donc g l'est aussi, de sorte qu'on peut calculer sa dérivée pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-k-1)x^{(-k-1)-1} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + x^{-k-1} f(x) \\ &= (-k-1)x^{-k-1}\varphi(f)(x) + x^{-k-1}f(x) = (-k-1)x^{-k-1}\lambda f(x) + x^{-k-1}f(x) \\ &= (-k-1)x^{-k-1}\frac{1}{k+1}f(x) + x^{-k-1}f(x) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est une fonction constante sur } \mathbb{R}_+^*}$. Notons $c \in \mathbb{R}$ cette constante. Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$x^{-k-1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = c \quad \Rightarrow \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \boxed{= cx^{k+1}.}$$

On obtient alors en dérivant (on a déjà justifié que tout était dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) = (k+1)cx^k.}$$

7. Pour $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$, on a donc montré que si $f \in E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)$, alors il existe un scalaire $d \in \mathbb{R}$ (égal à $(k+1) \times c$ avec les notations introduites dans la question précédente) tel que $f = du_k$. Réciproquement, on a vu que u_k appartient bien à $E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_k).}$$

Puisque $u_k \neq 0_E$, il suit que $\boxed{\dim\left(E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)\right) = 1}$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

Enfin, remarquons que :

$$\sum_{k=1}^n \dim\left(E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)\right) = \sum_{k=1}^n 1 = n < 2n = \dim(E).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas un endomorphisme diagonalisable.}}$

Exercice 3 (Edhec 2017)

1. (a) Écrivons :

$$A=\begin{pmatrix} -n & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & -n & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & -n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & n+1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & n+1\end{pmatrix}$$
$$\boxed{=J-(n+1)I.}$$

Puisque J et $(n+1)I$ commutent, il suit

$$A^2=(J-(n+1)I)^2=J^2-2(n+1)J+(n+1)^2I.$$

Or, il est aisé de voir que :

$$J^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & n & \dots & \dots & n\\ n & n & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & n\\ n & \dots & \dots & n & n\end{pmatrix}=nJ$$

Et donc $\boxed{A^2=(n+1)^2I-(n+2)J.}$

(b) En utilisant les deux relations de la question précédente, il vient

$$A^2=(n+1)^2I-(n+2)J=(n+1)^2I-(n+2)(A+(n+1)I)=-(n+2)A-(n+1)I.$$

Soit encore $A^2+(n+2)A+(n+1)I=0$.

Et donc un polynôme annulateur de A est $\boxed{X^2+(n+2)X+(n+1).}$

Le discriminant de ce polynôme de degré deux est $\Delta=(n+2)^2-4(n+1)=n^2$.

Il possède donc comme racines :

$$\lambda_1=\frac{-(n+2)+\sqrt{n^2}}{2}=-1 \text{ et } \lambda_2=\frac{-(n+2)-\sqrt{n^2}}{2}=-(n+1)$$

Puisque les racines du polynômes annulateur de A sont ses valeurs propres **possibles**, celles-ci sont donc $\boxed{-1 \text{ et } -(n+1).}$

(c) Par la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de A, donc $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

2. Puisque $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ est une base orthonormée :

$$\|u\|=\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2}=\sqrt{(n+1)\frac{1}{n+1}}\ \boxed{=1.}$$

3. (a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Calculons tout d'abord :

$$\langle\varepsilon_i,u\rangle=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\langle\varepsilon_i,\varepsilon_k\rangle}_{=\delta_{i,k}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

où $\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. En utilisant l'identité $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$ avec $x = \varepsilon_i$ et $y = \langle \varepsilon_i, u\rangle u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} u$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|e_i\|^2 &= \frac{n+1}{n}\left(\|\varepsilon_i\|^2 + \|\langle \varepsilon_i, u\rangle u\|^2 - 2\langle \varepsilon_i, \langle \varepsilon_i, u\rangle u\rangle\right) \\ &= \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1} - 2\langle \varepsilon_i, u\rangle^2\right) \\ &= \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\boxed{\|e_i\| = 1.}$

(b) Soient i, j deux entiers distincts de $[\![1, n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j\rangle &= \left\langle \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\right), \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_j - \langle \varepsilon_j, u\rangle u\right)\right\rangle \\ &= \frac{n+1}{n}\langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, \varepsilon_j - \langle \varepsilon_j, u\rangle u\rangle \\ &\underset{\text{bilin.}}{=} \frac{n+1}{n}(\underbrace{\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle}_{=0} - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle - \langle \varepsilon_j, u\rangle\langle \varepsilon_i, u\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle \underbrace{\langle u, u\rangle}_{=\|u\|=1}) \\ &= \frac{n+1}{n}\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n+1}{n}\frac{-1}{n+1} \boxed{= -\frac{1}{n}.} \end{aligned}$$

(c) φ est bien linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire, et à valeur dans $\mathbb{R}$. C'est donc une forme linéaire sur E, non nulle car $\varphi(u) = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 = 1$. Par le cours, son noyau $F = \operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E, i.e. $\boxed{\dim(F) = \dim(E) - 1 = n.}$

(d) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\varphi(e_i) = \langle e_i, u\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, u\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n}}(\langle \varepsilon_i, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle \underbrace{\langle u, u\rangle}_{=\|u\|=1}) = 0.$$

Donc $\boxed{e_0, \dots, e_n \text{ appartiennent à } F = \operatorname{Ker}(\varphi).}$

(e) Montrons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de F est libre. Soient pour cela $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il vient :

$$0 = \langle 0_E, e_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} -\frac{\lambda_i}{n} + \lambda_j$$

Ainsi, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est solution du système

$$\begin{cases} \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{n} - \dots - \frac{\lambda_n}{n} = 0 \\ -\frac{\lambda_1}{n} + \lambda_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{n} = 0 \\ \vdots \\ -\frac{\lambda_1}{n} - \dots - \frac{\lambda_{n-1}}{n} + \lambda_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{n}\begin{pmatrix} -n & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & -n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Mais à la question 1.(c), nous avons prouvé que la matrice A est inversible, et donc en multipliant $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=0$ à gauche par A^{-1}, il vient $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=0$, de sorte que $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. Ainsi, la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est libre. Puisqu'elle est de cardinal $n=\dim F$, c'est donc une $\boxed{\text{base de } F.}$

4. (a) Soient $x,y\in F$. Alors :

$$f(y,x)=\sum_{k=0}^{n}\langle y,e_k\rangle\langle x,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle y,x\rangle=\sum_{k=0}^{n}\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle x,y\rangle=f(x,y).$$

Donc f est symétrique. Soient $x,y,z\in F$. Alors :

$$\begin{aligned}f(\lambda x+y,z)&=\sum_{k=0}^{n}\langle\lambda x+y,e_k\rangle\langle z,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle\lambda x+y,z\rangle\\&=\sum_{k=0}^{n}(\lambda\langle x,e_k\rangle+\langle y,e_k\rangle)\langle z,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}(\lambda\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle)\\&=\lambda\left(\sum_{k=0}^{n}\langle x,e_k\rangle\langle z,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle x,z\rangle\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}\langle y,e_k\rangle\langle z,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle y,z\rangle\right)\\&=\lambda f(x,z)+f(y,z).\end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire à gauche, et étant déjà symétrique, elle est bilinéaire symétrique. Étant de plus à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\boxed{f\text{ est une forme bilinéaire symétrique.}}$

(b) Si $i=j$, alors :

$$f(e_i,e_i)=\sum_{k=0}^{n}\langle e_i,e_k\rangle^2-\frac{n+1}{n}\|e_i\|^2=\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{n^2}+\|e_i\|^4-\frac{n+1}{n}=\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{n^2}+1-\frac{n+1}{n}\boxed{=0.}$$

Et pour $i\neq j$:

$$\begin{aligned}f(e_i,e_j)&=\sum_{k=0}^{n}\langle e_i,e_k\rangle\langle e_j,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle e_i,e_j\rangle\\&=\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{n^2}+\langle e_i,e_j\rangle\langle e_j,e_j\rangle+\langle e_i,e_i\rangle\langle e_i,e_j\rangle+\frac{n+1}{n^2}\\&=\frac{n-1}{n^2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n^2}=\frac{n-1-2n+n+1}{n^2}\boxed{=0.}\end{aligned}$$

(c) Il s'agit de montrer que pour tout $(x,y)\in F\times F, f(x,y)=0$.
Soient donc $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{j=1}^n y_je_j$ deux éléments de F. Par bilinéarité de f, il vient

$$f(x,y)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\underbrace{f(e_i,e_j)}_{=0}=0.$$

Et donc, pour tous $x,y\in F$:

$$f(x,y)=0\Leftrightarrow\boxed{\sum_{k=0}^{n}\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle=\frac{n+1}{n}\langle x,y\rangle.}$$

(d) En prenant $y=x$ dans l'égalité précédemment obtenue, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n}\langle x,e_k\rangle\langle x,e_k\rangle=\frac{n+1}{n}\underbrace{\langle x,x\rangle}_{=\|x\|^2}\Leftrightarrow\boxed{\|x\|^2=\frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\langle x,e_k\rangle^2.}$$