DM7

Devoir maison à rendre le 20/11/2023

Les parties suivantes sont obligatoires pour le groupe d'approfondissement :

- *Partie I, questions 4. et 5. (les questions 1 à 3 introduisent la fonction* arctan *et ses principales propriétés que vous connaissez déjà, elles peuvent éventuellement être sautées).*
- *Parties II et III.*

Le problème comporte quatre parties.

On pose : $E_0 = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \text{bornée sur } \mathbb{R}\}$; si $f \in E_0$, on notera $N_0(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Partie I - Construction de la fonction arctan.

On définit, sous réserve d'existence, la fonction arctan : $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

1. Vérifier que la fonction arctan est bien définie sur $\mathbb{R}$, impaire, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et préciser une expression de $\dfrac{d}{dx}(\arctan)$.
2. Montrer que arctan admet une limite finie, notée provisoirement L, en $+\infty$ et justifier que arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-L, L[$.
3. Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, calculer $\arctan[\tan(x)]$, et en déduire la valeur de L.
4. Justifier que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$.
5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Si $f \in E_0$, on définit, sous réserve d'existence, $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
L'objectif du problème est d'obtenir quelques propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

Partie II - Premières propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

6. Vérifier que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
7. Soit $f \in E_0$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
8. Soit $f \in E_0$. Montrer que $\Phi(f)$ est bornée et $N_0[\Phi(f)] \leq \dfrac{\pi^2}{4} N_0(f)$.
9. Continuité de $\Phi(f)$ pour $f \in E_0$.
   Dans cette question, f désigne un élément de E_0 et x un réel.
   (a) Soit A un réel strictement positif et $h \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que :
   $$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f)\left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$
   (b) En déduire que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, pour tout $A > 0$,
   $$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f)\left(|h|\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \pi\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right).$$

(c) Soit $h \in \mathbb{R}^*$, en choisissant $A = \dfrac{1}{|h|}$, établir que :

$$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq |h| \frac{N_0(f)}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi N_0(f) \arctan|h|.$$

(d) Montrer alors que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(e) En déduire que $\Phi : f \in E_0 \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E_0.

Partie III - Étude d'un exemple.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
g est l'image par Φ de l'application constante égale à 1 : $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$.

10. Vérifier que g est impaire.

11. Dérivabilité de g sur $]0, +\infty[$. Soit x un réel strictement positif.

(a) Vérifier que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan''(u)| \leq \dfrac{1}{1+u^2}$.

(b) Soit a et b deux réels distincts, et I le segment d'extrémités a et b. Montrer que :

$$\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u \in I} \left(\frac{1}{1+u^2} \right).$$

(c) Soit $h \in \left] -\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2} \right[$ et t un réel positif. Établir :

$$\left| \arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leq \frac{t^2h^2}{2} \frac{1}{1 + \dfrac{t^2x^2}{4}}.$$

(d) Montrer alors que, pour tout $h \in \left] -\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2} \right[$,

$$\left| g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2x^2} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| \leq 2h^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{4+t^2x^2} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(e) En déduire que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et justifier que, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2x^2} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(f) g est-elle dérivable sur $]-\infty, 0[$? Si oui, que vaut $g'(x)$ pour $x < 0$?

12. Calcul de $g'(x)$ pour $x > 0$.

(a) Déterminer $g'(1)$.

(b) Pour tout $x \in]0,1[\cup]1, +\infty[$, chercher des expressions $A(x)$ et $B(x)$, indépendantes de t, telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x) \frac{t}{1+t^2x^2} + B(x) \frac{t}{1+t^2}.$$

(c) En déduire que, pour tout $x \in]0,1[\cup]1, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

(d) g est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$?

13. Une nouvelle expression de $g(x)$ pour $x > 0$.

   (a) Justifier, pour tout $x > 0$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

14. Étude de la limite de g en $+\infty$.

   (a) Démontrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \dfrac{\pi^2}{4} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Écrire, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

   et montrer alors que :

$$\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

   (c) Déterminer alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

15. Application au calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur à l'aide des questions précédentes.

   (b) Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Indication. On pourra, en le justifiant, utiliser le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^{2k}\ln(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$$

   (on justifiera l'existence des intégrales introduites).

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t$.

   (e) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = 0$.

   (f) Donner alors la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. En déduire celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie IV - Retour à l'étude de Φ.

16. Montrer que $\displaystyle\sup_{f\in E_0\setminus\{0\}} \frac{N_0[\Phi(f)]}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}$.

Dans toute la suite du problème, on considère :

- $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| < \dfrac{4}{\pi^2}$, on pourra poser $\gamma = \dfrac{\pi^2}{4}|\lambda|$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^n = \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{n \text{ fois}}$, autrement dit $\Phi^0 = \mathrm{id}_{E_0}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^{n+1} = \Phi \circ \Phi^n$.
- $f \in E_0 \setminus \{0\}$, on posera $M = N_0(f)$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \lambda^n \Phi^n(f)$.

17. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \lambda\Phi(\varphi_n)$ et $N_0(\varphi_{n+1}) \leq \gamma N_0(\varphi_n)$.
18. Peut-on avoir $\lambda\Phi(f) = f$? Que peut-on alors dire de $\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi$?
19. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n M$ et que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} N_0(\varphi_n)$ converge.
20. Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \varphi_n(x)$ converge.

On note alors $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$.

20. Montrer que φ est bornée sur $\mathbb{R}$.
21. Continuité de φ.
    (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,
    $$|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| \leq |\lambda| N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan|h|\right].$$
    (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,
    $$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right) \left[\frac{|h|}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan|h|\right] + |f(x+h) - f(x)|.$$
    (c) Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
22. Application aux valeurs spectrales de Φ.
    (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right)$ et montrer que :
    $$\lim_{n \to +\infty} N_0 \left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f\right] = 0.$$
    (b) Montrer alors que $(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) = f$. Que peut-on dire de $\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi$?
    (c) Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Phi - \mu\mathrm{id}_{E_0}$ ne soit pas bijective, montrer que $|\mu| \leq \dfrac{\pi^2}{4}$.