DM5

Devoir maison à rendre le 20/11/2023

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} \mathrm{d}t$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Partie I : Premières propriétés de la fonction H.

1. Justifier que la fonction H est définie sur I.
2. Montrer que H est décroissante sur I.
3. (a) Calculer $H(1)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$.
   En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.

   (c) Écrire un programme `Python` qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.

   (d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\Big((n-1)!\Big)^2}$.

Partie II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

4. (a) Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi^{-1}(t)$.

   (b) À l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, montrer que :
   $$\forall x \in I,\ H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}} \mathrm{d}u.$$

5. (a) Justifier que : $\forall u \in [0; +\infty[,\ \mathrm{e}^u \leqslant \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \leqslant 2\mathrm{e}^u$.

   (b) En déduire que : $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{4^x}{2(2x-1)}$.

6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

Partie III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7. (a) Montrer que : $\forall u \in [0; 1],\ \ln(1+u) \geqslant \frac{u}{2}$.

   (b) Montrer que, pour tout x de I, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2} \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

   (c) En déduire que : $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \int_0^1 \dfrac{1}{(1+t^2)^x} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2} \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

(d) Montrer que : $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x-1}$.

(e) En déduire la limite de H en $+\infty$.

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\Big(H(n)\Big) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.

(a) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat obtenu à la question 3.(b).

(b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge.

(c) En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$.

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K.