DM5

# Correction du devoir maison (EM Lyon 2017)

## Partie I : Premières propriétés de la fonction $H$

1. Soit $x \in I$ fixé. Posons $f_x : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x} = \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}^+$. La fonction $f_x$ est $\mathscr{C}^0$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions qui le sont. L'intégrale est donc généralisée en $+\infty$. De plus :

   - $\frac{1}{(1+t^2)^x} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2x}}$ car $\frac{t^{2x}}{(1+t^2)^x} = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^x = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\right)^x = e^{-x\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   - $\frac{1}{t^{2x}} \geq 0$ pour tout $x \in I$ et $t > 0$.
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}} dt$ converge car c'est une intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2x > 1$.

   Par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $\boxed{H \text{ est définie sur } I.}$

2. Soit $\frac{1}{2} < x < y$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+t^2) \geq 0$, de sorte que $-y\ln(1+t^2) \leq -x\ln(1+t^2)$. En composant par exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-y\ln(1+t^2)} \leq \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}$.

   Intègrons de 0 à $+\infty$. On obtient par croissance de l'intégrale (tout converge d'après la question précédente) :

   $$H(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^y}\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t = H(x).$$

   Donc $\boxed{H \text{ est décroissante sur } I.}$

3. (a) Soit $A > 0$, calculons :

   $$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^1} dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^A = \mathrm{Arctan}(A) - \mathrm{Arctan}(0) = \mathrm{Arctan}(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

   D'où l'égalité $\boxed{H(1) = \frac{\pi}{2}.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A > 0$. Effectuons une intégration par parties sur le segment $[0, A]$.

   $$\begin{array}{c|ccc} + & \frac{1}{(1+t^2)^n} & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & \frac{-n(2t)}{(1+t^2)^{n+1}} & \xleftarrow{\int} & t \end{array}$$

   Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Par intégration par parties sur le segment $[0, A]$ :

   $$\begin{aligned}\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^A - \int_0^A \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t - 2n\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{A}{(1+A^2)^n} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{1}{A^{2n-1}} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ car $2n-1>0$, on obtient par passage à la limite (toutes les autres intégrales en jeu convergent) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\to} 2nH(n) - 2nH(n+1).$$

On obtient donc : $\boxed{H(n) = 2n(H(n) - H(n+1)).}$

D'où en isolant $H(n+1)$ dans l'expression précédente :

$$\boxed{H(n+1) = \tfrac{2n-1}{2n}H(n)}.$$

(c) On peut procéder avec une boucle for :

```python
import numpy as np

n = int(input('Entrer un entier n'))
H = np.pi/2
for k in range(2,n+1):
        H = (2*k-1)*H/(2*k)
print(H)
```

(d) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « $H(n) = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}$. ».

**Init.** Pour $n=1$, $\dfrac{(0)!\pi}{2^1\left(0!\right)^2} = \dfrac{\pi}{2} = H(1)$. D'où la propriété $\mathscr{P}_1$ vraie.

**Hér.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. Calculons :

$$\begin{aligned}
H(n+1) = \frac{2n-1}{2n}H(n) &\overset{\mathscr{P}_n}{=} \frac{2n-1}{2n} \times \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n}{2n} \times \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2} \\
&= \frac{(2(n+1)-2)!\pi}{2^{2n+1}\left(n!\right)^2} = \frac{(2(n+1)-2)!\pi}{2^{2(n+1)-1}\left(((n+1)-1)!\right)^2}.
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie.

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{la propriété } \mathscr{P}_n \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

## Partie II : Étude de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers $\frac{1}{2}$

4. (a) La fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons, et :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \varphi'(u) = \frac{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}{2} > 0.$$

Donc $\varphi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\lim_{u\to\pm\infty}\varphi(u) = \pm\infty$. Par le théorème de la bijection, $\boxed{\varphi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Comme $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty}(\varphi) = +\infty$, il vient $\boxed{\varphi^{-1}(0) = 0 \text{ et } \lim\limits_{t\to+\infty}\varphi^{-1}(t) = +\infty.}$

**Remarque.** La fonction $\varphi$ est communément appelée *fonction sinus hyperbolique*, et sa dérivée $\varphi'$ la *fonction cosinus hyperbolique*.

(b) Le changement de variable $t = \varphi(u)$ est de **classe $\mathscr{C}^1$** et **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$. Il est donc licite. Lorsque $t : 0 \to +\infty$, $u : 0 \to +\infty$. Calculons $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}\mathrm{d}u$. Par le théorème de changement de variable, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$ est de même nature que :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\varphi(u)^2)^x}\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty}\frac{4^x}{(4+\mathrm{e}^{2u}-2+\mathrm{e}^{-2u})^x}\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{4^x}{(\mathrm{e}^{2u}+2+\mathrm{e}^{-2u})^x}\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{4^x}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^{2x}}\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}\mathrm{d}u\\ &= \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Puisqu'on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t$ converge, ces deux intégrales sont donc convergentes, et :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad H(x) = \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\mathrm{d}u.}$$

5. (a) Pour tout $u \in [0; +\infty[$, $\mathrm{e}^u \leq \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}$ car $0 \leq \mathrm{e}^{-u}$. Et puisque $u$ est positif, $-u \leq u$ et donc $\mathrm{e}^{-u} \leq \mathrm{e}^u$. D'où les inégalités :

$$\boxed{0 < \mathrm{e}^u \leq \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \leq 2\mathrm{e}^u}$$

(b) La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient pour tout $u \in [0; +\infty[$ :

$$0 < \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}} \leq \mathrm{e}^{-u}.$$

Soit $x > \frac{1}{2}$. Puisque $2x-1 > 0$, la fonction $t \mapsto t^{2x-1} = \mathrm{e}^{(2x-1)\ln(t)}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où :

$$0 < \frac{1}{2^{2x-1}}\mathrm{e}^{-u(2x-1)} \leq \frac{1}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^{2x-1}} \leq \mathrm{e}^{-u(2x-1)}.$$

En multipliant par $\frac{4^x}{2} \geq 0$, et par croissance de l'intégrale, en notant que toutes les intégrales convergent (l'intégrale usuelle $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u(2x-1)}\mathrm{d}u$ converge car $2x-1 > 0$), on obtient :

$$\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u(2x-1)}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u(2x-1)}\,\mathrm{d}u.$$

Calculons : $\displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-u(2x-1)}\mathrm{d}u = \left[\frac{\mathrm{e}^{-u(2x-1)}}{-(2x-1)}\right]_0^A = \frac{\mathrm{e}^{-A(2x-1)}-1}{-(2x-1)} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2x-1}.$

Par conséquent :

$$\frac{4^x}{2^{2x}}\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2}\frac{1}{2x-1}.$$

D'où l'inégalité voulue :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}.}$$

6. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{1}{2x-1} = +\infty$, il suit que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} H(x) \text{ existe et vaut } +\infty}$ par théorème de comparaison.

   En multipliant les inégalités de la question précédente par $2x-1>0$, on obtient :

$$1 \leq (2x-1)H(x) \leq \frac{4^x}{2}.$$

   Comme $\frac{4^x}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln(4)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x\ln(2)}}{2} \underset{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}{\longrightarrow} 1$, le théorème des gendarmes implique que $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}(2x-1)H(x)$ existe et vaut 1, ce qui se récrit :

$$\boxed{H(x) \underset{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}{\sim} \frac{1}{2x-1}.}$$

## Partie III : Étude de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$

7. (a) Posons $h : t \in [0,1] \mapsto \ln(1+t)$. La fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ comme composée de fonctions qui le sont.

   Soit $u \in ]0,1]$ fixé. Par l'égalité des accroissements finis sur $[0,u] \subset [0,1]$, il existe un réel $c \in ]0,u[$ tel que

$$h(u) - h(0) = h'(c) \times u = \frac{u}{1+c}.$$

   Comme de plus $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+c}$ (puisque $c \in ]0,1[$), il suit :

$$\boxed{\ln(1+u) \geq \frac{u}{2}.}$$

   Notons que cette égalité est aussi vérifiée pour $u=0$, puisqu'alors $\ln(1+u) = 0 = \frac{u}{2}$.

   **Remarque.** On aurait également pu étudier la fonction $g : t \mapsto \ln(1+t) - \dfrac{t}{2}$ et montrer qu'elle est positive sur $[0,1]$.

   (b) **Méthode 1 : à l'aide de la densité de la loi normale.**
   On rappelle que pour $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, une densité de loi $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ est :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

   D'où ici en posant $\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{x}$, on obtient : $\quad f(t) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}$.

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t$ converge aussi et vaut $\sqrt{\dfrac{2\pi}{x}}$. Par parité de $f$, $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{2\pi}{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}.}$

**Méthode 2 : par changement de variable affine.**

Effectuons le changement de variable affine (donc licite) $u=\sqrt{x}t$. Par théorème de changement de variable, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

On reconnait ici une intégrale de Gauss qui converge et dont la valeur est $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (en utilisant la parité et le résultat rappelé dans l'énoncé). Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{x}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

(c) Soient $x\in I$ et $t\in[0,1]$. En appliquant la question 7.(a) avec $t^2\in[0,1]$ :

$$0\leq \frac{1}{(1+t^2)^x}=\mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}\leq e^{-xt^2/2}.$$

Par croissance de l'intégrale (tout converge car ce sont des intégrales de fonctions continues sur un segment) :

$$\boxed{0\leq\int_0^1\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t\leq\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t\leq\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t+\underbrace{\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t}_{0\leq}=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}.}$$

(d) Soient $x\in I$ et $t\geq 1$. Alors

$$0<t^2<1+t^2 \;\Rightarrow\; 0\leq\frac{1}{1+t^2}\leq\frac{1}{t^2}\;\Rightarrow\; 0\leq\frac{1}{(1+t^2)^x}\leq\frac{1}{t^{2x}}$$

car la fonction $u\mapsto u^x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En intégrant sur $[1,+\infty[$ (possible car toutes les intégrales convergent, notamment l'intégrale de Riemann d'exposant $2x>1$), on obtient par croissance de l'intégrale :

$$0\leq\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t\leq\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2x}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2x-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x\in I,\ 0\leq\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t\leq\frac{1}{2x-1}.}$$

(e) Puisque $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $\frac{1}{2x-1}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on obtient par théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{1}\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$ existent et valent 0. D'où par somme de limites et relation de Chasles pour les intégrales convergentes :

$$\boxed{H(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\to}0.}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln\Big(H(n+1)\Big) + \frac{\ln(n+1)}{2} - \ln\Big(H(n)\Big) - \frac{\ln(n)}{2} \\ &= \ln\left(\frac{H(n+1)}{H(n)}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \underbrace{\ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right)}_{\text{Avec la question 3.(b)}} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

À l'aide du développement limité $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ (possible car $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), on obtient :

$$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $\boxed{u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}.}$

(b) Effectuons un théorème de comparaison.

- $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}$,
- $\frac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge avec $\alpha = 2 > 1$.

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum(u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}}$

(c) Par définition, une série converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles converge. Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{n=1}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) = u_N - u_1 \text{ par télescopage.}$$

La série étant convergente d'après la question précédente, la suite $(u_n)$ converge vers une limite finie qu'on notera $a$. Par composition par la fonction exponentielle continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(e^{u_n})$ converge vers $K = e^a > 0$. Et puisque $e^{u_n} = e^{\ln(H(n)) + \frac{\ln(n)}{2}} = H_n\sqrt{n}$, il suit que $H_n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} K$ avec $K$ non nul, ce qui se récrit encore :

$$\boxed{H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}.}$$

9. Puisque $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ pour tout $x > 1$, on obtient par décroissance de $H$ :

$$H\left(\lfloor x \rfloor + 1\right) \leq H(x) \leq H\left(\lfloor x \rfloor\right).$$

Multiplions par $\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} \geq 0$ :

$$\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H\left(\lfloor x \rfloor + 1\right) \leq \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(x) \leq \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H\left(\lfloor x \rfloor\right).$$

On obtient :

$$\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 1}} \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 1}}{K} H\left(\lfloor x \rfloor + 1\right) \leq \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(x) \leq \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H\left(\lfloor x \rfloor\right)$$

Étudions les termes aux extrémités des inégalités :

- pour le terme de droite, puisque $H(\lfloor x \rfloor) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}$, alors $\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H\left(\lfloor x \rfloor\right) \underset{x \to +\infty}{\to} 1$.
- pour le terme de gauche, on a déjà $\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 1}}{K} H\left(\lfloor x \rfloor + 1\right) \underset{x \to +\infty}{\to} 1$ encore à l'aide de l'équivalent obtenu à la question précédente. De plus :

$$\sqrt{\frac{\lfloor x \rfloor}{\lfloor x \rfloor + 1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}}} \underset{x \to +\infty}{\to} 1.$$

Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(x)$ existe et vaut 1, et donc :

$$H(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}.$$

Notons enfin que $x \underset{x \to +\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor$ puisque $1 \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \leq \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\lfloor x \rfloor}$ et que $\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\lfloor x \rfloor} \underset{x \to +\infty}{\to} 1$. On obtient finalement :

$$\boxed{H(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}.}$$

---