DM4

Devoir maison à rendre le 06/11/2023

Exercice 1

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par (I,J,K,L), et Id l'endomorphisme identité de E. On pose $A=J+K$.

1. Montrer que (I,J,K,L) est une base de E et donner la dimension de E.
2. (a) Exprimer $J\times K$ et J^2 en fonction de I,J,K et L.

   On admettra qu'on a également les égalités suivantes :

   $$K\times L=J,\ L\times J=K \text{ et } K^2=L^2=-I.$$

   (b) En déduire que $K\times J=-L$, $L\times K=-J$ et $J\times L=-K$.

   (c) En déduire que E est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire que :

   $$\forall (M,N)\in E^2,\ M\times N\in E.$$

3. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
4. On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe :

   $$\varphi_A(M)=AMA^{-1}.$$

   (a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$, puis montrer que φ_A est un automorphisme de E.
5. (a) Déterminer la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I,J,K,L).

   (b) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\varphi_A-\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_A+\mathrm{Id})$.

   (c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ_A est $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

Exercice 2

Nous admettrons dans la suite que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge et qu'on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

1. (a) Montrer que, pour tout couple $(x,y)\in([0,+\infty[)^2$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

(b) Montrer que, pour tout x de $[0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0,+\infty[$, par $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3. (a) Établir : $\forall (x,y)\in([0,+\infty[)^2, \quad S(y)-S(x)=(y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

   (b) En déduire: $\forall (x,y)\in([0,+\infty[)^2, \quad |S(y)-S(x)|\leq \frac{\pi^2}{6}\,|y-x|$.

   (c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0,+\infty[$.

4. (a) Montrer, pour tout couple (x,y) de $([0,+\infty[)^2$ tel que $x\neq y$:

$$\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right|\leqslant |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

   (b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in[0,+\infty[, \quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

   (c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

5. On admet que S est $\mathscr{C}^1$. Montrer que S est concave.

6. Soit $x\in]0,+\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall t\in[1,+\infty[, \quad \varphi(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}.$$

   (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}\varphi(t)\mathrm{d}t\leqslant\varphi(n)$. En déduire que :

$$\int_1^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t\leqslant S(x)\leqslant 1+\int_1^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

   (c) Conclure que $S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(x+1)$. En déduire que $S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(x)$.

7. (a) Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

   (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Exercice 3

On considère deux jetons J_1, et J_2, équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).

Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.

Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.

Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.

On note E l'événement « le jeton J_1 est choisi pour le jeu » et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement « le k-ème lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

Partie I : étude de quelques variables aléatoires liées à l'épreuve.

1. (a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.

   (b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?

   Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$.

   (b) En déduire que $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?

   (c) Montrer que X a une espérance puis déterminer $E(X)$.

   (d) Montrer que $X(X-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(X) = 2$.

3. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(Y = n)$.

   (b) En déduire que $P(Y = 0) = 0$.

   (c) Montrer que Y a une espérance puis déterminer $E(Y)$.

   (d) Montrer que $Y(Y-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(Y) = \dfrac{5}{4}$.

4. On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ la variable aléatoire S par : $\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$.

   (a) Déterminer $S(\Omega)$.

   (b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.

   (c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, comparer d'une part $[X = n]$ et $[Y < n]$, et d'autre part $[Y = n]$ et $[X < n]$, puis en déduire que : $[S = n] = [X = n] \cup [Y = n]$.

   (d) Reconnaitre alors la loi de S et préciser son espérance et sa variance.

5. On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ la variable I par : $\forall \omega \in \Omega,\ I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

   (a) Montrer que I est une variable de Bernoulli.

   (b) Déterminer $P(I = 0)$, puis donner la loi de I, ainsi que son espérance et sa variance.

Partie II : simulation des variables X et Y.

6. On suppose avoir importé le module `numpy.random` à l'aide du préfixe `rd`. On considère le programme suivant :

```python
def edhec2005():
    X = 0
    jeton = rd.randint(1,3)
    lancer = rd.randint(2)
    if jeton == 1 :
        X = 1
        while lancer <> 0 :
            lancer = rd.randint(2)
            X = X+1
    return X
```

(a) Expliquer le fonctionnement de la fonction `edhec2005`. Que représente la valeur qu'elle retourne ?

(b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle `while` est fini ?

7. Écrire une fonction `Python` qui simule la variable aléatoire Y.
