

Devoir maison à rendre le 18/09/2023

Exercice 1

On admet que, si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ , alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n S_k \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i x_i.$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i$.

En déduire que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $\sum_{k=1}^n y_k = T_n$.

(b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}}$.

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

(a) On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I , alors, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in I^n, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \leq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$.

(b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^n k x_k \right)^{1/n}$.

En déduire que : $z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n$.

(c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

(d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

(e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a : $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

(b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^1 \ln x \, dx$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad -1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right) \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right)$, puis établir que : $\left(\frac{1}{n!} \right)^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

4. On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$.

Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ particulière que

l'on note $(x_n(N))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^n x_n(N) \right)^{1/n}$.

(a) Écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

(b) En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

(c) Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.