DM1

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Edhec 2012)

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} y_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i x_i \qquad \text{par définition des } y_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k(k+1)} i x_i\end{aligned}$$

On reconnait ici une somme double sur le triangle $1 \leq i \leq k \leq n$. On obtient donc en permutant les sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} y_k &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} i x_i = \sum_{i=1}^{n} i x_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} i x_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1+k-k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} i x_i \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} i x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} i x_i \frac{n+1-i}{i(n+1)} \\ &\boxed{= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) x_i.}\end{aligned}$$

D'où la première égalité.

D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}T_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_k = \frac{1}{n+1} \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} x_i \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} x_i = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) x_i \boxed{= \sum_{k=1}^{n} y_k.}\end{aligned}$$

D'où la seconde égalité demandée.

(b) Puisque la série $\sum x_n$ converge, la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente, de limite $\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Par le résultat admis en préambule du problème, on en déduit que la limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k$ existe et vaut ℓ.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k}_{\underset{n\to+\infty}{\to} \ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\sum y_n$ converge. On en déduit (par définition d'une série convergente) que $\boxed{\sum y_n \text{ converge}}$ et que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Commençons par noter que si l'un des a_k est nul, alors l'inégalité demandée est évidente car :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq 0.$$

Supposons à présent que $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. La fonction logarithme $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet intervalle et que $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par le résultat admis en début de question, il suit :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leq f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

soit encore :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Or $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)$. D'où :

$$\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right),$$

et en appliquant la fonction exponentielle qui est strictement croissante :

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} kx_k\right)^{1/n} = \left(\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\right)^{1/n} = \left(n!\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\right)^{1/n} = (n!)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = (n!)^{\frac{1}{n}} z_n.$$

Ainsi, $\boxed{z_n = \dfrac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} kx_k\right)^{1/n}.}$

Par l'inégalité obtenue à la question précédente appliquée aux réels $kx_k \geq 0$, il vient :

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} kx_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{(n!)^{1/n}} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kx_k = \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} \times \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kx_k \boxed{= \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n.}$$

(c) La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et satisfait $f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Donc f est concave sur $\mathbb{R}_+$. Sa courbe représentative est par conséquent en dessous de ses tangentes, et notamment de sa tangente en 0. Or la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $a = 0$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \text{soit ici} \quad y = x.$$

On en déduit, pour tout réel x positif, que : $\boxed{\ln(1+x) \leq x.}$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ à l'aide de l'inégalité obtenue à la question précédente, et donc $n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$. Par croissance de la fonction exponentielle, il vient :

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leq e.}$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+k}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)^k}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod_{i=2}^{n+1}i^{i-1}}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{(n+1)^n\cdot\prod_{i=2}^{n}i^{i-1}}{n!\cdot\prod_{k=1}^{n}k^{k-1}} \boxed{=\frac{(n+1)^n}{n!}}.$$

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}_{\leq e \text{ d'après 2.(d)}} \leq e^n.$$

Par croissance de la fonction $t \mapsto t^{1/n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit : $\dfrac{(n+1)}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \leq e.$

On dispose ainsi des inégalités $0 \leq z_n = \dfrac{(n+1)}{(n!)^{1/n}}y_n \leq ey_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque la série de terme général y_n converge par la question 1.(b), il suit par théorème de comparaison que $\boxed{\text{la série } \sum z_n \text{ converge}}$ aussi, et que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} y_n \overset{1.(b)}{=} e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.}$$

3. (a) La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, donc pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et pour $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$,

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{k}^{(k+1)/n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)\mathrm{d}x,$$

soit encore :

$$\boxed{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).}$$

(b) Calculons :

$$\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_{1/n}^{1} = -1 + \frac{1}{n} - \frac{\ln(1/n)}{n} = -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}.$$

De plus, en sommant les inégalités de la question 3.(a) pour k variant de 1 à $n-1$, il vient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Notons que par la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/n}^{1}\ln(x)\,\mathrm{d}x$. En utilisant le calcul d'intégrale qu'on vient de faire, il vient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right).$$

Donc d'une part, on a déjà :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\geq -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln(n)}{n}=-1+\frac{1}{n}.$$

Finalement, on obtient pour tout $n\geq 2$:

$$\boxed{-1+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}.}$$

(c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ par croissance comparée, par le théorème des gendarmes, il vient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=-1.$$

Déjà vu ?

Ce résultat ressemble beaucoup à une somme de Riemann entre $a=0$ et $b=1$ pour $f(t)=\ln(t)$. Rappelons cependant que le théorème sur les sommes de Riemann ne pouvait pas être appliqué directement : il impose en effet comme hypothèse que la fonction f doit être **continue sur le segment** $[a,b]$, ce qui n'est pas le cas ici (f étant continue sur $]0,1]$ mais pas $[0,1]$).

Il s'agit à présent de prouver que établir que $\left(\dfrac{1}{n!}\right)^{1/n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{e}{n}$, ou de manière équivalente : $\dfrac{e(n!)^{1/n}}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$. Récrivons cette expression sous forme exponentielle :

$$\frac{e(n!)^{1/n}}{n}=\exp\left(1+\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln(n)\right).$$

Intéressons nous au terme contenu dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln(n)&=1+\frac{1}{n}\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)-n\ln(n)\right)\\&=1+\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\sum_{k=1}^{n}\ln(n)\right)\\&=1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1-1=0.\end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle, il suit $\lim_{n\to+\infty}\frac{e(n!)^{1/n}}{n}=1$, de sorte que :

$$\boxed{\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e}{n}.}$$

4. (a) On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} x_n(N) \boxed{= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.}$$

De même, $z_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{(n!)^{1/n}} & \text{si } n \in [\![1, N]\!], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$, de sorte que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} z_n(N) \boxed{= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n!)^{1/n}}.}$$

(b) Nous avons prouvé que : $\dfrac{1}{(n!)^{1/n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$.

Or, la série de terme général $\dfrac{e}{n}$ diverge, et donc d'après le résultat admis au début de la question 4, les sommes partielles des séries à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{(n!)^{1/n}}$ sont équivalentes. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n!)^{1/n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{e}{n}$$

Et donc en particulier : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$, de sorte que :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.}$$

5. Il a été prouvé à la question 2. que $\lambda = e$ convient. Reste à montrer que c'est la plus petite constante satisfaisant l'inégalité de l'énoncé.

Soit pour cela λ une constante telle que pour toute série $\sum x_n$ convergente et à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n. \qquad (*)$$

Prouvons que $\lambda \geq e$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $(*)$ doit en particulier être vérifiée pour la suite $(x_n(N))_{n\geq 1}$ définie à la question 4. Ainsi :

$$\forall N \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N), \text{ ce qui se récrit : } \quad \forall N \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)} \leq \lambda.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient alors :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)} \leq \lambda, \text{ soit encore : } \quad e \leqslant \lambda.$$

On en déduit que $\boxed{e \text{ est la plus petite des constantes } \lambda \text{ telles que } \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.}$