Complément 3

Symétries vectorielles

Ce complément de cours présente des résultats sur les symétries vectorielles. Ces résultats sont hors programme en ECG. Il pourra cependant être profitable de les travailler en vue des concours, notamment des épreuves écrites et orales de parisiennes.

Commençons par rappeler la définition d'une symétrie vectorielle.

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que :

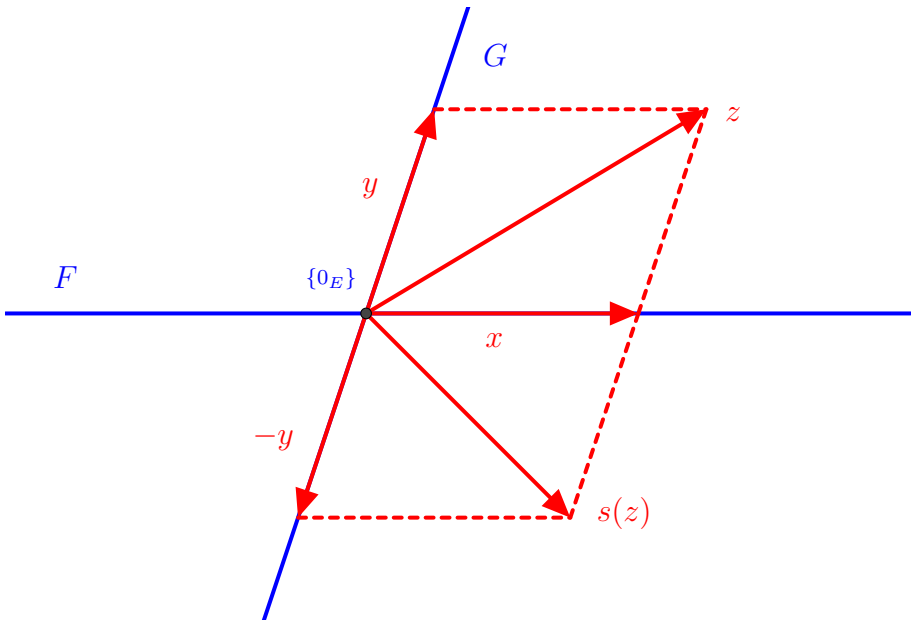
$$z = x + y.$$

On appelle *symétrie de z par rapport à F dans la direction de G*, et on note $s(z)$, le vecteur :

$$s(z) = x - y.$$

L'application $s : E \to E$ ainsi définie est appelée la *symétrie par rapport à F dans la direction de G*.

Représentation graphique.



Symétrie de z par rapport à F dans la direction de G.

Rappel. Puisque $E = F \oplus G$, on dispose des projecteurs associés à cette décomposition :

- p le projecteur sur F parallèlement à G ;
- q le projecteur sur G parallèlement à F.

Rappelons que ces projecteurs satisfont les relations suivantes :

$$p + q = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Propriété 1

(1) $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$. En particulier s est linéaire.

(2) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. En particulier s est un automorphisme de E, et $s^{-1} = s$.

(3) $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$. Ainsi : $\forall x \in F,\ s(x) = x$.

(4) $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi : $\forall y \in G,\ s(y) = -y$.

Preuve.

(1) Pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que : $z = x + y$.
Puisque $p(z) = x$ et $q(z) = y$, on peut écrire : $s(z) = x - y = p(z) - q(z)$.
Ainsi $s = p - q$, donc s est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires. Et comme $p + q = \mathrm{Id}_E$, s s'écrit aussi $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

(2) On compose :

$$s \circ s = (p - q) \circ (p - q) = p \circ p - p \circ q - q \circ p + q \circ q = p + q = \mathrm{Id}_E.$$

(3) On procède par double inclusion.

- $\subset$ Soit $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et donc $s(x) = x$. Ceci se récrit $(s - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$, et donc $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.
- $\supset$ Soit $z \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$. Il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. Puisque $s(z) = z$, on obtient $x - y = x + y$, d'où $y = 0_E$. Ainsi $z = x \in F$.

On a ainsi montré que $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.

(4) Procédons toujours par double inclusion.

- $\subset$ Soit $y \in G$, écrivons $y = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{y}_{\in G}$, et donc $s(y) = -y$. Ainsi $(s + \mathrm{Id}_E)(y) = 0_E$, et y appartient à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
- $\supset$ Soit $z \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. Puisque $s(z) = -z$, on obtient $x - y = -x - y$, et donc $x = 0_E$. Ainsi $z = y$ et appartient à G.

Finalement, $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

□

Remarque. Notons que les sous-espaces $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont stables par s (en tant que noyaux d'endomorphismes commutant avec s). De plus l'endomorphisme induit par s sur F est Id_F, et celui induit par s sur G est $-\mathrm{Id}_G$.

Propriété 2

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$s \text{ est une symétrie} \quad \Leftrightarrow \quad s \circ s = \mathrm{Id}_E.$$

Plus précisément, $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve. On a déjà montré l'implication $\Rightarrow$. Montrons la réciproque. Pour cela, posons $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$, et calculons :

$$p \circ p = \frac{(s + \mathrm{Id}_E) \circ (s + \mathrm{Id}_E)}{4} = \frac{s \circ s + s + s + \mathrm{Id}_E}{4} = \frac{s + \mathrm{Id}_E}{2} = p.$$

Donc p est un projecteur sur $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$. Il suit que :

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad s = 2p - \mathrm{Id}_E.$$

Donc s est bien la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(\frac{s - \mathrm{Id}_E}{2}) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $G = \mathrm{Ker}(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. □

Remarque. Ainsi, un endomorphisme s de E est une symétrie vectorielle si, et seulement si, $x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s.

Exercice. On considère l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À tout élément $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on associe l'élément $T(f) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = f(-x).$$

Montrer que T est une symétrie de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

> On vérifie facilement que T est un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T \circ T(f)(x) = T(T(f))(x) = T(f)(-x) = f(-(-x)) = f(x).$$
>
> Donc $T \circ T = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et T est la symétrie par rapport à $\mathscr{P} = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\mathscr{I} = \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}_E)$. Remarquons enfin que :
>
> $$f \in \mathscr{P} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathbb{R},\; f(-x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; f \text{ est paire.}$$
>
> De même, on montre que $\mathscr{I}$ est l'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
>
> Enfin, il suit de cette étude que $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$ (résultat déjà vu en TD).

Exercice. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = {}^tM$.

1. Montrer que f est une symétrie et la décrire.
2. Retrouver de cette manière que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

> 1. L'application f est linéaire par linéarité de la transposée. De plus, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
>
> $$f \circ f(M) = f(f(M)) = f({}^tM) = {}^t({}^tM)) = M.$$
>
> Ainsi, f est bien une symétrie, sur $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $G = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$. Décrivons ces deux espaces :
>
> - Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :
>
> $$M \in F \Leftrightarrow M \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow {}^tM = M \Leftrightarrow M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$
>
> Donc $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
>
> - Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
>
> $$M \in G \Leftrightarrow M \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow f(M) = -M \Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Donc $F = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

2. Puisque s est une symétrie par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dans la direction de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, il suit que :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Propriété 3

On suppose que E est de dimension finie n. Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Notons $k = \dim(F)$. Soit s la symétrie vectoriel par rapport à F dans la direction de G.

(1) La matrice de s dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ est :

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0\dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{n-k \text{ fois}}).$$

En particulier, s est diagonalisable.

(2) $\operatorname{Tr}(s) = \dim(F) - \dim(G)$.

Preuve.

(1) Soit donc $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_k)$ une base de F, $\mathscr{B}_G = (e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de G. Puisque $E = F \oplus G$, la famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. De plus :

- pour tout $1 \leq i \leq k$, e_i appartient à F et donc $s(e_i) = e_i$;
- pour tout $k+1 \leq i \leq n$, e_i appartient à G et donc $s(e_i) = -e_i$.

Ainsi, la matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par :

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0\dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Rappelons que la trace d'un endomorphisme est par définition la trace de sa matrice dans n'importe quelle base. Ainsi :

$$\operatorname{Tr}(s) = \operatorname{Tr}(M_{\mathscr{B}}(s)) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ fois}} - (\underbrace{1 + \dots + 1}_{n-k \text{ fois}}) = \dim(F) - \dim(G).$$

□