Complément 0

Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.

Dans ce complément de cours, nous présentons diverses méthodes pour l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 1, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I. Bien que les exercices seront souvent détaillés et qu'aucune connaissance théorique sur ces suites n'est exigée en ECG, il est utile de connaitre les différentes situations que l'on peut rencontrer, et de savoir comment mener l'étude d'une telle suite selon les cas.

Représentation graphique

Afin d'avoir une idée du comportement de la suite, ce qui est très utile pour ensuite mener son étude, on commencera par visualiser graphiquement ses premiers termes.

Méthode. Représentation graphique de la suite (u_n).

Pour représenter les premiers termes de la suite (u_n), on procèdera ainsi :

(i) *On effectue l'étude de la fonction f, puis on trace sur un même graphe sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.*

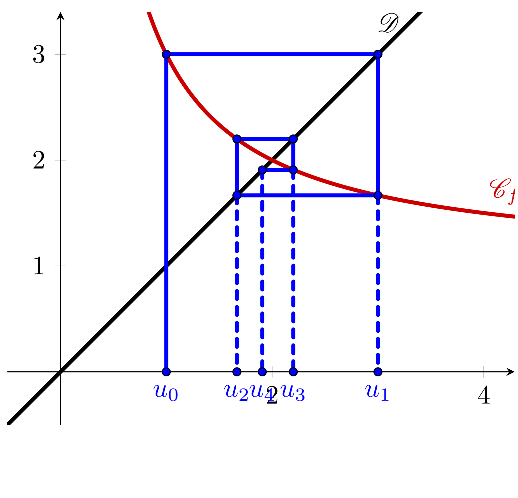
(ii) *on place u_0 sur l'axe des abscisses.*

(iii) *à l'aide de la courbe de f, on place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.*

(iv) *grâce à la droite $\mathscr{D}$, on replace u_1 sur l'axe des abscisses, puis on réitère le processus sur u_1 ...*

Exercice. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

Commençons donc par étudier la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}^*$. Elle est continue et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, et on a pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} < 0$. Elle est donc décroissante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, et on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$. On peut donc tracer la courbe représentative de f, et représenter les premiers termes de la suite (u_n).



Existence et encadrement des termes de la suite

Mise en garde.

Une définition par récurrence n'assure pas l'existence de la suite. En effet, les termes de la suite peuvent sortir du domaine de définition de f.

Exemple. Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(u_n)$$

Elle n'est bien définie que pour ses trois premiers termes car $u_1 = \ln(2) \simeq 0,69$, $u_2 = \ln(\ln(2) \simeq -0,36$, et donc u_3 n'existe pas car u_2 est sorti du domaine de définition du logarithme.

Pour s'assurer de l'existence de tous les termes de la suite, on choisit donc u_0 dans un intervalle stable de f.

Définition.

On dit qu'un intervalle $J \subset I$ est *stable par f* si $f(J) \subset J$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in J, \quad f(x) \in J.$$

Méthode. Intervalle stable par f.

Pour montrer qu'un intervalle J est stable par f, on pourra selon les cas :

- *soit déterminer $f(J)$ à l'aide du tableau de variation de f et vérifier que $f(J) \subset J$;*
- *soit « à la main » : si $J = [a, b]$ (par exemple) et si $a \leq x \leq b$, montrer que $a \leq f(x) \leq b$.*

Exercice. Montrer que l'intervalle $J =]0, +\infty[$ est stable par la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$.

Pour tout $x \in J$, on a $x \in \mathscr{D}_f$ et $f(x) = 1 + \frac{2}{x} \in J$. Ainsi, on a bien $f(J) \subset J$, et J est bien un intervalle stable par f.

Méthode. (u_n) bien définie.

Pour montrer que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in J$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourra utiliser que J est stable par f et faire la récurrence suivante :

Init. *Puisque $u_0 \in J$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.*

Hér. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n.*
On a par hypothèse de récurrence $u_n \in J \subset \mathscr{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien. De plus, puisque J est un intervalle stable, $u_{n+1} \in f(J) \subset J$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. *Par principe de récurrence, u_n est bien défini et appartient à J pour tout $n \in \mathbb{N}$*

Exercice. On considère toujours la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini, et que $u_n > 0$.

Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in J =]0, +\infty[$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Init. Puisque $u_0 = 1 > 0$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n.
On a par hypothèse de récurrence $u_n > 0$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien. De plus, puisque J est

un intervalle stable par f, $u_{n+1} \in f(J) \subset J$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. Par principe de récurrence, u_n est bien défini et appartient à J pour tout $n \in \mathbb{N}$

Variations de la suite

Cas général

Méthode. Monotonie de la suite (u_n).

Pour étudier les variations de la suite (u_n), on pourra tenter de comparer directement u_n et u_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$, en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si jamais ce signe est trop compliqué à étudier, on pourra se rappeler que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. On étudie alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur l'intervalle stable J et on dresse son tableau de signe.

- *Si $g(x) \geq 0$ sur J, alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a en prenant $x = u_n$ que $f(u_n) - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.*
- *Si $g(x) \leq 0$ sur J, alors de même la suite (u_n) est décroissante.*

Si la fonction f est croissante

Méthode. Monotonie de (u_n) dans le cas f croissante.

Si la fonction f est croissante, on peut toujours montrer que la suite (u_n) est monotone. On pourra pour cela procéder comme suit :

(i) on compare les deux premiers termes de la suite u_0 et u_1 (éventuellement à l'aide de l'étude de g).

(ii) si $u_0 \leq u_1$, alors on montre par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leq u_{n+1}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Init. *$\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque par hypothèse, $u_0 \leq u_1$.*

Hér. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.*
Par hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$. Comme f est croissante, on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, soit encore $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. D'où la propriété au rang $n+1$.

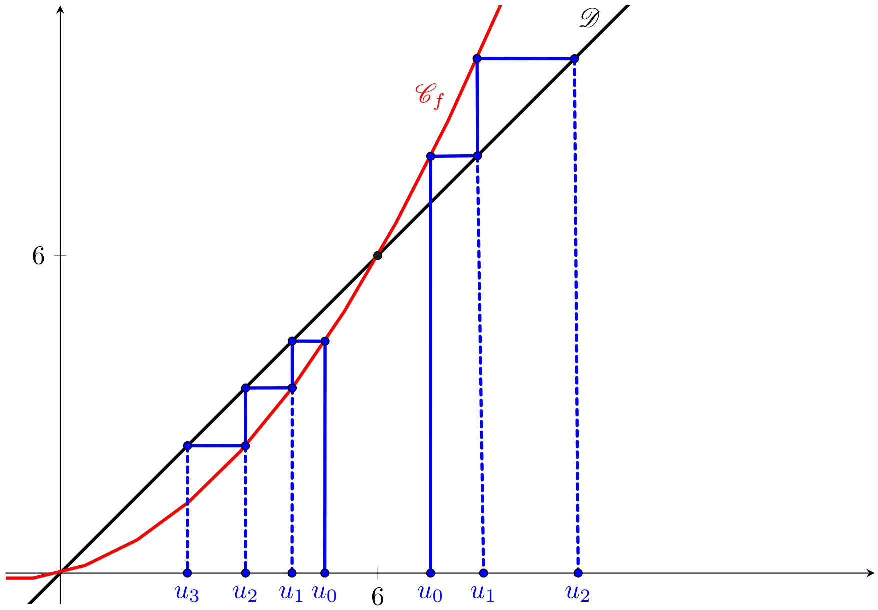
Concl. *Par principe de récurrence, on a $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite (u_n) est croissante.*

Si $u_0 \geq u_1$, alors on montre de même que (u_n) est décroissante.

Exercice. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{8} + \dfrac{u_n}{4}$.

1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) en distinguant les cas suivant la valeur de u_0.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) en fonction de la valeur de u_0.

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction polynomiale de degré 2, de racines respectives 0 et -2 (après calcul éventuel du discriminant) et donc le coefficient dominant est positif. On peut donc représenter cette parabole, et les premiers termes de la suite (u_n).



On observe graphiquement que :

- si $u_0 \in]0,6[$, la suite (u_n) semble décroissante,
- si $u_0 > 6$, la suite (u_n) semble croissante,
- Si $u_0 = 6$, la suite (u_n) semble constante égale à 6.

2. Pour tout $x > 0$, on a :

$$g(x) = f(x) - x = \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{4} = \frac{x(x-6)}{8}.$$

Supposons que $u_0 \in]0,6[$. On a $u_1 - u_0 = g(u_0) = \dfrac{u_0(u_0-6)}{8} \leq 0$, et donc $u_1 \leq u_0$. Montrons alors par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $u_{n+1} \leq u_n$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Init. On a vu que $u_1 \leq u_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq u_{n+1}$. Comme f est croissante, on a $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$, soit encore $u_{n+1} \geq u_{n+2}$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. Par principe de récurrence, on a $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite (u_n) est décroissante lorsque $u_0 \in]0,6[$.

En procédant de même, on montre que (u_n) est constante si $u_0 = 6$, et croissante si $u_0 > 6$.

Proposons malgré tout une autre méthode dans le cas où $u_0 > 6$. Pour cela, commençons par noter que $J =]6,+\infty[$ est un intervalle stable par f car $f(]6,+\infty[) =]6,+\infty[$. Par récurrence (que je vous laisse rédiger), on a donc $u_n > 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) = \frac{u_n(u_n-6)}{8} \geq 0.$$

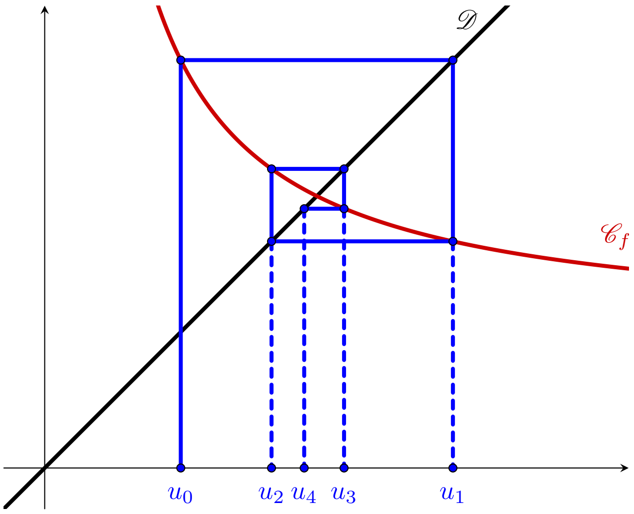
On retrouve ainsi que la suite (u_n) est croissante lorsque $u_0 > 6$.

Mise en garde.

Bien que la fonction f soit croissante, la suite (u_n) ne l'est pas forcément : elle est croissante si $u_0 \leq u_1$, ou décroissante si $u_0 \geq u_1$.

Si la fonction f est décroissante

Dans ce cas, la suite (u_n) n'est plus monotone, comme nous avons pu le constater dans notre premier exemple :



Cas où f est décroissante : diagramme en "escargot".

En revanche, on observe que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) des termes pairs et impairs de (u_n) sont monotones et de monotonie contraire. Cela sera toujours le cas.

Méthode. Étude de (u_n) dans le cas f décroissante.

Si la fonction f est décroissante, alors on pose $h = f \circ f$. Puisque f est décroissante, h est croissante. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = h(u_{2n+1}).$$

On est donc ramené au cas de deux suites récurrentes (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour une fonction croissante h. On peut donc appliquer les résultats de la section précédente :

- *si $u_0 \leq u_2$, alors en composant par f décroissante, on a $u_1 \geq u_3$: la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante.*
- *si $u_0 \geq u_2$, alors de même $u_1 \leq u_3$: la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante.*

Exercice. On considère toujours la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$. Étudier la monotonie des suites extraites paire et impaire (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

On a $u_1 = 3$ et $u_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \geq u_0$. Montrons alors par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Init. On a $u_2 \geq u_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$. Comme f est décroissante, on a $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$, puis $f \circ f(u_{2n}) \leq f \circ f(u_{2n+2})$, soit encore $u_{2n+2} \leq u_{2n+4}$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. Par principe de récurrence, on a $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite extraite (u_{2n}) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \underset{f \text{ décr.}}{\Rightarrow} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}.$$

La suite extraite impaire (u_{2n+1}) est donc décroissante.

Convergence de la suite

Limites finies possibles

On suppose que la suite (u_n) converge vers une **limite finie** ℓ qu'on cherche à déterminer. Pour cela, nous avons besoin de la notion de point fixe.

Définition.

On appelle *point fixe de f* toute solution de l'équation $f(x) = x$.
Graphiquement, il s'agit de l'abscisse des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite $\mathscr{D} : y = x$.

Théorème 1

Si f est **continue** sur un intervalle stable J et si (u_n) converge vers $\ell \in J$ alors $f(\ell) = \ell$, et ℓ est un point fixe de f.

Preuve. Puisque (u_n) converge vers ℓ, alors $\lim u_{n+1} = \ell$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ par continuité de f en $\ell \in J$. On peut donc passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, ce qui nous donne $\ell = f(\ell)$. □

Méthode. Limites finies possibles de (u_n).

*Pour déterminer les limites finies **possibles** de la suite (u_n), on cherche les points fixes de f, qui sont aussi les points d'annulation de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur J*

Convergence lorsque f est croissante

Lorsque f est croissante, nous avons vu que la suite (u_n) est monotone (croissante ou décroissante). Selon que l'intervalle stable J est bornée ou non, on pourra utiliser le théorème de la limite monotone pour prouver la convergence de la suite. On rappelle son énoncé.

Théorème 2 (*de la limite monotone*)

- Toute suite croissante et majorée converge.
  Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
  Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Exercice. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4}$. Étudier la convergence de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.

Cas $u_0 \in]0,6[$.
Nous avons vu que dans ce cas, (u_n) est décroissante. De plus, on a $f(]0,6[) =]0,6[$, de sorte que l'intervalle $]0,6[$ est stable par f. Par récurrence (que je vous laisse rédiger si nécessaire), on a donc $u_n \in]0,6[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée (par 0). Par théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers une limite finie ℓ. De plus, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq u_0$, on en déduit par passage à la limite dans les inégalités que $0 \leq \ell \leq u_0 < 6$. Or ℓ est nécessairement un point fixe de f, de sorte que :

$$f(\ell) = \ell \quad \Rightarrow \quad g(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell(\ell-6)}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell = 0 \text{ ou } \ell = 6.$$

Puisque $\ell \in [0,6[$, on en déduit que $\ell = 0$ et que (u_n) converge vers 0.

Cas $u_0 = 6$.
Dans ce cas, la suite (u_n) est constante, et converge donc vers 6.

Cas $u_0 > 6$.
Nous avons vu que dans ce cas, (u_n) est croissante. Par théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers une limite finie ℓ ou diverge vers $+\infty$. Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ, alors ℓ est

nécessairement un point fixe de f, et donc $\ell = 0$ ou $\ell = 6$. Or $u_n \geq u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque (u_n) est croissante, ce qui donnerait par passage à la limite dans les inégalités, $\ell \geq u_0 > 6$. D'où une contradiction. Ainsi (u_n) diverge vers $+\infty$ dans ce cas.

Convergence lorsque f est décroissante

Lorsque f est décroissante, nous avons vu que (u_n) n'est pas monotone. Cependant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) le sont. On pourra alors procéder comme suit :

- On pourra étudier la convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) à l'aide du théorème des suites monotones.
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers une même limite** ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

En effet, on rappelle le résultat suivant.

Propriété 3 (de convergence à partir des suites extraites paires et impaires)

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers la même limite** ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice. Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

La fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$ est continue et décroissante, et on a $f(1) = 3$ et $f(3) = \dfrac{5}{3}$. On a donc $f([1,3]) = [5/3, 3] \subset [1,3]$. L'intervalle $[1,3]$ est donc stable par f, et on montre par récurrence (que je vous laisse là encore rédiger si nécessaire) que $u_n \in [1,3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc bornées (entre 1 et 3) et on a établi qu'elles sont monotones. Elles convergent donc vers des limites finies ℓ et ℓ' respectivement par le théorème de limite monotone, toutes deux dans l'intervalle $[1,3]$.

De plus, ℓ et ℓ' sont nécessairement des points fixes de la fonction $h = f \circ f$. On cherche donc les points fixes de h dans l'intervalle $[1,3]$. On a :

$$h(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x+2}{x+2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ ou } x = 2.$$

La seule solution dans $[1,3]$ est 2, donc les deux suites convergent vers la même limite, à savoir 2.

Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers 2, on en déduit que (u_n) est elle aussi convergente vers 2.

Convergence par l'inégalité des accroissements finis

On peut aussi utiliser dans certains cas l'inégalité des accroissements finis pour montrer que la distance entre u_n et sa limite possible ℓ tend vers 0. On en rappelle l'énoncé.

Théorème 4 (*Inégalité des accroissements finis*)

Si f est **dérivable** sur J, et s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in J$, $|f'(x)| \leq M$, alors

$$\forall (a,b) \in J^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Méthode. Convergence de (u_n) à l'aide de l'IAF.

Pour montrer la convergence de (u_n) vers un point fixe $\ell \in J$ à partir de l'inégalité des accroissements finis, on procèdera ainsi :

(i) on majore $|f'|$ par une constante M sur l'intervalle stable J contenant les termes de la suite. Il faut pour que cette méthode fonctionne que $0 \leq M < 1$;

(ii) on applique l'inégalité des accroissements finis à f avec $b = u_n$ et $a = \ell$ pour obtenir

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq M|u_n - \ell|.$$

(iii) on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$ ».

Init. *$\mathscr{P}(0)$ découle de l'inégalité des accroissements finis avec $a = \ell$ et $b = u_0$.*

Hér. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.*
Par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$. Alors on a :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M|u_n - \ell| \leq M \times M^n|u_0 - \ell| = M^{n+1}|u_0 - \ell|.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Concl. *Par principe de récurrence, on a $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(iv) Si $M \in [0, 1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n|u_0 - \ell| = 0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ par encadrement.

Calcul approché du point fixe. Si $J = [a, b]$, le calcul précédent nous donne une estimation de l'erreur :

$$|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell| \leq M^n|b - a|.$$

Ainsi, u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $M^n|b - a|$.

Exercice. Reprenons la suite (u_n) déifinie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$. En déduire que $|u_n| \leq \frac{1}{2^n}$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

1. L'intervalle $[0, 1]$ est stable par $f : x \mapsto \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}$. Par récurrence (que je vous laisse rédiger), on a bien $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La fonction f est polynomiale, donc continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. De plus, on a pour tout $x \in]0, 1[$, $|f'(x)| = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$. Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :
$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$
3. On applique l'inégalité précédente avec $x = u_n$ et $y = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|.$$
Par récurrence (que je vous laisse rédiger comme ci-dessus), on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_n| \leq \frac{1}{2^n}|u_0| = \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on obtient par théorème d'encadrement que $\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe et vaut 0.

Programmation

On présente ici quelques programmes classiques sur les suites récurrentes linéaires.

Calcul du n-ième terme de la suite

Pour calculer le n-ième terme de la suite (u_n) à l'aide de **Python**, on commence par définir la fonction f.

```
def f(x):
    y = ...
    return y
```

On obtient alors le n-ième terme de la suite (u_n) à l'aide de la fonction suivante, qui prend en entrée l'entier n correspondant au rang souhaité, et α le premier terme de la suite.

```
def suite(n,alpha):
    u = alpha
    for k in range(n):
        u = f(u)
    return(u)
```

Représentation des termes de la suite

On souhaite représenter les $N+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, afin par exemple de prédire son comportement (monotonie, convergence). Pour cela, on suppose avoir importé les librairies `numpy` et `matplotlib.pyplot` à l'aide des préfixes `np` et `plt` respectivement. On peut procéder comme suit.

```
x = np.arange(N+1)
u = np.zeros(N+1)
u[0] = alpha
for i in range(N):
    u[i+1] = f(u[i])
plt.plot(x,u,'+')
```

Ce programme permet de représenter les $N+1$ points de coordonnées (n, u_n) pour $n = 0, \ldots, N$, le vecteur `x` contenant les abscisses et `u` contenant les ordonnées de ces points. Rappelons également que l'argument `'+'` dans la commande `plt.plot` permet de ne pas relier ces points et de les représenter par le symbole `+`.

Calcul approché du point fixe

Supposons avoir établi comme précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| \leq M^n |b - a|.$$

On peut, lorsque $M \in [0, 1[$, obtenir une valeur approchée de ℓ à un ε fixé près. Pour cela, on peut utiliser le programme `Python` suivant, qui prend en entrée les réels $\alpha, M, a, b, \varepsilon$, et qui renvoie une approximation de ℓ à $\pm\varepsilon$ près.

```
def approx(alpha,M,a,b,eps):
    n = 0
    while (b-a)*M**n >= eps:
        n = n+1
    return(suite(n,alpha))
```