

## Valeurs propres, vecteurs propres

<b>1</b>	<b>Valeurs propres, vecteurs propres</b>	<b>2</b>
1.1	Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme . . . . .	3
1.2	Vecteurs propres et espaces propres d'une matrice carrée . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Recherche d'éléments propres</b>	<b>7</b>
2.1	Cas des matrices $2 \times 2$ . . . . .	7
2.2	Cas des matrices triangulaires . . . . .	8
2.3	Utilisation d'un polynôme annulateur . . . . .	9
2.4	Recherche des valeurs propres « à vue » . . . . .	10
2.5	Cas général . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Propriétés générales</b>	<b>14</b>
3.1	Sous-espaces propres stables . . . . .	14
3.2	Somme directe de sous-espaces propres . . . . .	14
3.3	Conséquences . . . . .	15

### Compétences attendues.

- ✓ Déterminer les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme (cas des matrices  $2 \times 2$ , triangulaires, à l'aide d'un polynôme annulateur, ou dans le cas général).
- ✓ Déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre  $\lambda$ .
- ✓ Utiliser l'inégalité 
$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq \dim(E).$$

# 1 Valeurs propres, vecteurs propres

Dans tout ce chapitre :

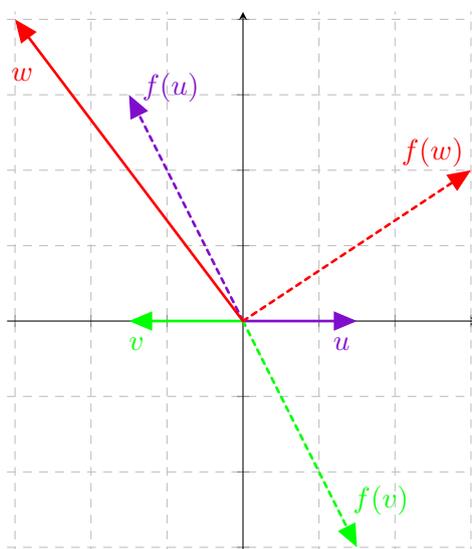
- $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  ;
- $f$  est un endomorphisme de  $E$  ;
- $A$  est une matrice carrée de taille  $n \times n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) à coefficients réels.

## Motivation géométrique.

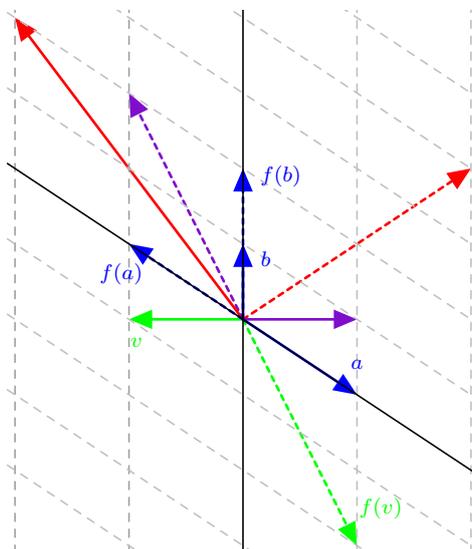
On souhaite mieux comprendre la façon dont un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  agit sur les vecteurs de  $E$ . Pour un certain nombre d'endomorphismes, c'est particulièrement simple : par exemple, pour les multiples de l'identité (endomorphisme nul et homothéties), tous les vecteurs subissent le même traitement, à savoir être multipliés par le même scalaire. Mais ce problème s'avère plus complexe pour un endomorphisme quelconque. Prenons l'exemple de l'endomorphisme  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (2x, -2x - y).$$

Représentons sur la figure ci-dessous trois vecteurs  $u, v, w$  ainsi que leurs images par  $f$ .



Il semble a priori bien difficile de comprendre « géométriquement » quelle est la transformation qui se cache derrière  $f$ . Pour mieux y parvenir, effectuons un changement de bases, en posant  $a = (3/2, -1)$  et  $b = (0, 1)$ . Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre, et donc une base de  $\mathbb{R}^2$ , dans laquelle on peut à nouveau représenter nos vecteurs et leurs images par  $f$ .



Dans cette base, tout semble plus clair : on a  $f(a) = -a$  et  $f(b) = 2b$ . Et pour  $v$  par exemple, il se décompose sous la forme  $v = -a - b$ , et donc :

$$f(v) = -f(a) - f(b) = a - 2b.$$

Plus généralement, tout vecteur  $u \in \mathbb{R}^2$ , après décomposition  $u = \lambda a + \mu b$  dans la base  $(a, b)$ , est transformé par  $f$  en :

$$f(u) = \lambda f(a) + \mu f(b) = -\lambda a + 2\mu b.$$

Ainsi dans la base  $(a, b)$ , on comprend bien la transformation réalisée par  $f$  : calculer l'image d'un vecteur par  $f$ , c'est multiplier par  $-1$  sa composante suivant  $a$  et par  $2$  sa composante suivant  $b$ . La transformation  $f$  n'est donc pas aussi simple qu'une homothétie de  $\mathbb{R}^2$ , mais elle agit de la même manière « localement » : elle stabilise les droites vectorielles  $\text{Vect}(a)$  et  $\text{Vect}(b)$  et induit sur ces sous-espaces des homothéties de rapport  $-1$  et  $2$  respectivement.

Le but de ce chapitre est d'expliquer, pour un endomorphisme  $f$  quelconque d'un espace  $E$ , comment trouver des sous-espaces  $F$  stables par  $f$  sur lesquels  $f$  induit une homothétie de rapport  $\lambda$ . Cela va nous amener à introduire la notion de *sous-espace propre* et de *valeur propre* associée.

Nous verrons dans le **Chapitre 13. Diagonalisation.** que, sous certaines conditions, de tels sous-espaces sont supplémentaires dans  $E$ , nous permettant ainsi, comme dans l'exemple ci-dessus, une compréhension « géométrique » complète de la transformation  $f$ .

**Motivation algébrique.**

On souhaite trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est « la plus simple possible » pour faciliter les calculs. Nous verrons dans le **Chapitre 13. Diagonalisation.** sous quelles conditions on peut obtenir une matrice diagonale et comment l'obtenir. D'un point de vue matriciel, cela correspond à étudier les conditions sur  $A$  pour obtenir une matrice diagonale semblable à  $A$ , et déterminer la matrice de passage correspondante.

Partons de notre objectif en supposant que la matrice de  $f$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est diagonale :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \\ \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \\ e_n \end{matrix}.$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(e_i)$  est égal à  $\lambda_i \cdot e_i$  avec  $e_i \neq 0_E$  (car c'est un vecteur d'une famille libre). En particulier, la droite vectorielle  $\text{Vect}(e_i)$  est stable par  $f$ , et  $f$  y induit une homothétie de rapport  $\lambda_i$ . Ceci conduit là encore naturellement à la notion d'*éléments propres* que l'on développe dans ce chapitre.

**1.1 Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme**

**Définition.**

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On dit que  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $f$  lorsque :

$$\exists x \in E \setminus \{0_E\}, \quad f(x) = \lambda \cdot x.$$

- On dit alors qu'un vecteur **non nul**  $x \in E$  est un *vecteur propre* de  $f$  associé à la *valeur propre*  $\lambda$  si :

$$f(x) = \lambda \cdot x.$$

- On appelle *spectre* de  $f$ , et on note  $\text{Sp}(f)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $f$ .



**Exercice.**  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, -2x - 2y + 5z).$$

Montrer que  $u = (1, 0, 1)$  est un vecteur propre de  $f$  et déterminer la valeur propre  $\lambda$  associée.

**Remarque.** Pour tout  $x \in E$  :

$$f(x) = \lambda \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad (f - \lambda \text{Id}_E)(x) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E).$$

### Définition.

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , on appelle *sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$* , et on note  $E_\lambda(f)$ , le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par :

$$E_\lambda(f) = \{x \in E / f(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E).$$

$E_\lambda(f)$  est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à  $\lambda$  et du vecteur nul  $0_E$ .

**Exercice.** Déterminer  $E_\lambda(f)$  dans l'exercice précédent.

**Remarque.** Supposons  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on dispose des équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(f) &\Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, \quad f(x) = \lambda \cdot x \\ &\Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, \quad x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)) < n \quad \text{par le th. du rang} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id}_E) \text{ n'est pas bijective.} \end{aligned}$$

On en déduit le théorème suivant.

### Théorème 1 (Caractérisation des valeurs propres pour un endomorphisme)

On dispose des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(f) &\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) < n \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id}_E) \text{ n'est pas bijective.} \end{aligned}$$

De plus,  $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E)$ .

**Exercice.** On considère toujours l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, -2x - 2y + 5z).$$

Montrer que 1 est valeur propre de  $f$  et déterminer le sous-espace propre associé.

**Propriété 2** (Cas particulier : la valeur propre 0)

On a l'équivalence :

$$0 \in \text{Sp}(f) \iff f \text{ n'est pas bijective.}$$

De plus,  $\dim(E_0(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f)$ .



## 1.2 Vecteurs propres et espaces propres d'une matrice carrée

On définit les éléments propres d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  comme étant ceux de l'endomorphisme canoniquement associé  $\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX \end{cases}$ .

### Définition.

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On dit que  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $A$  lorsque :

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad AX = \lambda X.$$

- On dit qu'un vecteur colonne **non nul**  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est un *vecteur propre* de  $A$  associé à la *valeur propre*  $\lambda$  si :

$$AX = \lambda X.$$

- On appelle *spectre* de  $A$ , et on note  $\text{Sp}(A)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

**Remarque.** En Python, la commande `al.eig(A)` de la bibliothèque `numpy.linalg` permet d'obtenir le spectre d'une matrice  $A$ .

### Définition.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . On appelle *sous-espace propre* de  $A$  associé à la *valeur propre*  $\lambda$ , et on note  $E_\lambda(A)$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  défini par :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

$E_\lambda(A)$  est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à  $\lambda$  et du vecteur nul  $0_{n,1}$ .

**Propriété 3** (Liens endomorphismes/matrices)

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , et  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \in \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

En particulier,  $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$  et  $\dim(E_{\lambda}(f)) = \dim(E_{\lambda}(A))$  pour toute valeur propre  $\lambda$ .

**Preuve.** Il suffit de noter que la matrice de  $f - \lambda \text{Id}_E$  est  $A - \lambda I_n$ . Ainsi l'équivalence souhaitée est bien satisfaite. En particulier :

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}.$$

Donc  $\text{Sp}(f)$  est bien égal à  $\text{Sp}(A)$ . □

**Propriété 4**

Deux matrices semblables  $A$  et  $A'$  ont les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.

**Preuve.**

□



**Mise en garde.**

Il n'y a pas de réciproque : deux matrices ayant mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension ne sont pas forcément semblables.

Tous les énoncés concernant les endomorphismes sont vrais en particulier pour l'endomorphisme  $\varphi_A$ . Ils peuvent donc être reformulés pour une matrice  $A$ .

**Théorème 5** (Caractérisation des valeurs propres pour une matrice)

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n)) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible} \end{aligned}$$

De plus,  $\dim(E_{\lambda}(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$ .



**Propriété 6** (Cas particulier : la valeur propre 0)

On a les équivalences :

$$0 \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \text{rg}(A) < n \Leftrightarrow A \text{ n'est pas inversible.}$$

De plus,  $\dim(E_0(A)) = n - \text{rg}(A)$ .

**Propriété 7**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  et  ${}^tA$  ont les mêmes valeurs propres, et  $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^tA))$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .

**Preuve.**

□



**Mise en garde.**

En revanche, les sous-espaces propres de  $A$  et  ${}^tA$  n'ont aucune raison d'être égaux : un vecteur  $X$  vérifiant  $AX = \lambda X$  ne satisfera pas nécessairement  ${}^tAX = \lambda X$ .

## 2 Recherche d'éléments propres

**Vocabulaire.** Déterminer les *éléments propres* d'un endomorphisme ou d'une matrice, c'est déterminer :

- toutes ses valeurs propres ;
- le sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres (souvent en donnant une base de ce sous-espace vectoriel).

### 2.1 Cas des matrices $2 \times 2$

**Propriété 8** (Cas des matrices  $2 \times 2$ )

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda \text{ est racine de } x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A).$$

**Preuve.**

□

**Exercice.** Déterminer les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$ .

## 2.2 Cas des matrices triangulaires

### Propriété 9



Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

**Preuve.**

□

**Exemple.** Les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  sont  $-2, 0, 5$ .

### Propriété 10

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur de rang  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Alors, le spectre de  $p$  est  $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$ .

**Preuve.**

□

### 2.3 Utilisation d'un polynôme annulateur

#### Propriété 11

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ , et  $u \in E_\lambda(f)$ . Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[x]$  :

$$P(f)(u) = P(\lambda) \cdot u.$$

Preuve.

□

#### Propriété 12

Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme annulateur de  $f \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ). Alors les valeurs propres de  $f$  (resp.  $A$ ) sont **parmi** les racines de  $P$ .



Preuve.

□



#### Mise en garde.

Attention, il n'y a **pas de réciproque** : une racine de  $P$  n'est pas forcément valeur propre de  $f$ . Par exemple  $x(x - 1)$  est un polynôme annulateur de  $\text{Id}_E$ . Donc les valeurs propres **possibles** pour  $\text{Id}_E$  sont 0 et 1. Réciproquement, seul 1 est valeur propre de  $\text{Id}_E$ .

**Exemple.** Supposons  $E$  de dimension finie  $n$ , et soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur de rang  $r \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Puisque  $p \circ p = p$ ,  $x^2 - x$  est un polynôme annulateur de  $p$ . Donc les valeurs propres **possibles** de  $p$  sont 0 et 1.

Vérifions que ce sont bien des valeurs propres de  $p$  :

- $E_0(p) = \text{Ker}(p) = G$ , et  $\dim(E_0(p)) = n - \text{rg}(p) = n - r > 0$  par le théorème du rang. Donc 0 est bien valeur propre de  $p$ .
- $E_1(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = F = \text{Im}(p)$ . Or  $\dim(\text{Im}(p)) = r > 0$ . Donc 1 est bien valeur propre de  $p$ .

**Exercice.** Déterminer les valeurs propres de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice.** Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  nilpotent d'indice  $k \in \mathbb{N}^*$  (c'est-à-dire tel que  $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ ).

## 2.4 Recherche des valeurs propres « à vue »



**Méthode. Recherche des valeurs propres « à vue ».**

*On pourra tenter de trouver directement, lorsque cela est facile :*

- un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A - \lambda I_n$  est de rang  $< n$  ;
- une matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nulle qui satisfait  $AX = \lambda X$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*On pourra tester notamment  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  qui conviendra lorsque la somme des coefficients de chaque ligne de  $A$  est identique.*

*Si l'un de ces points est satisfait,  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ .*

**Exercice.** Donner deux valeurs propres de  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

## 2.5 Cas général



**Méthode. Recherche des valeurs propres par l'algorithme du pivot de Gauss.**

En dernier recours, et **seulement si toutes les méthodes précédentes n'aboutissent pas** (ce qui n'est pratiquement jamais le cas dans un sujet de concours), on procèdera comme suit pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  ou d'une matrice  $A$  :

- (i) on écrit la matrice  $A$  de  $f$  dans une base donnée ;
- (ii) on calcule  $A - \lambda I_n$  où  $\lambda$  est une indéterminée ;
- (iii) on échelonne la matrice  $A - \lambda I_n$  en suivant l'algorithme de Gauss **sur les lignes**. On respectera pour cela les consignes suivantes :
  - autant que possible, on échangera deux lignes afin de ne plus avoir  $\lambda$  sur la diagonale, sauf sur le dernier coefficient en bas à droite ;
  - si ce n'est pas possible, on sera amené à prendre pour pivot une expression dépendante de  $\lambda$ . Dans ce cas, on poursuit l'algorithme en supposant ce pivot non nul pour ne pas diviser par 0. On indiquera alors à cette étape les valeurs « interdites » pour  $\lambda$  ;
- (iv)  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si, et seulement si,  $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ , soit si, et seulement si, l'un des pivots est nul (argument à redonner à chaque fois). On est donc ramené à la résolution d'équations polynomiales.
- (v) on termine en étudiant chaque valeur « interdite » : on reprend les calculs et on regarde si  $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$  pour chaque valeur de  $\lambda$  exclue précédemment.

**Exercice.** Déterminer le spectre des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

**Méthode. Détermination des sous-espaces propres.**

*On suppose avoir déterminé les valeurs propres de  $A$  par l'algorithme de Gauss. Pour déterminer  $E_\lambda(A)$  :*

- *si on veut seulement sa dimension :  $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$  ;*
- *pour déterminer explicitement  $E_\lambda(A)$ , on résout le système linéaire  $(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$  qui a déjà été échelonné lors du calcul des valeurs propres.  $E_\lambda(A)$  est l'ensemble des solutions de ce système.*

**Exercice.** Calculer la dimension et les sous-espaces propres des matrices précédentes.

### 3 Propriétés générales

#### 3.1 Sous-espaces propres stables

##### Propriété 13

- Soient  $f$  et  $g$  des endomorphismes de  $E$  qui commutent. Alors tout sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .
- Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ ,  $E_\lambda(f)$  est stable par  $f$ . L'endomorphisme induit par  $f$  sur  $E_\lambda(f)$  est l'homothétie de rapport  $\lambda$ .

**Preuve.**

□

**Remarque.** Comme on l'a expliqué dans l'introduction, il est difficile de comprendre « géométriquement » la façon dont  $f \in \mathcal{L}(E)$  agit sur  $E$  tout entier. La propriété précédente nous dit que sur chacun des sous-espaces propres  $E_\lambda(f)$ , cette application linéaire agit très simplement : elle transforme  $x \in E_\lambda(f)$  en  $\lambda \cdot x$ .

#### 3.2 Somme directe de sous-espaces propres

##### Propriété 14

Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  des scalaires deux à deux distincts. Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , il existe un unique polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$  tel que :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La famille  $(L_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est appelée *famille des polynômes de Lagrange* associée à  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .

**Preuve.**

□

**Propriété 15**



Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  des valeurs propres deux à deux distinctes de  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors la somme  $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$  est directe.

**Preuve.**

□

### 3.3 Conséquences

**Propriété 16**



Une famille de vecteurs propres de  $f$  associée à des valeurs propres distinctes est libre.

**Preuve.**

□

**Propriété 17**



- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $f$  possède au plus  $n = \dim(E)$  valeurs propres distinctes.
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  possède au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

**Preuve.**

□

**Remarque.** Il se peut bien évidemment que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  possède strictement moins de  $n$  valeurs propres. Par exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  possède une seule valeur propre 1.
- $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ne possède aucune valeur propre réelle. En effet :

$$\lambda \in \text{Sp}(B) \iff \lambda^2 - \text{Tr}(B)\lambda + \det(B) = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0.$$

Cette équation n'ayant pas de solution réelle, il n'y a pas de valeur propre réelle.

**Propriété 18**



L'inégalité suivante est satisfaite :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n = \dim(E).$$

**Preuve.**

□

**Remarque.** Il n'y a pas égalité en général. On a vu par exemple que pour  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$  et  $\dim(E_1(A)) = \dim(E_2(A)) = 1$ , et donc :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 < 3.$$

**Exercice.** Déterminer toutes les valeurs propres de  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Propriété 19**

- Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  possède  $n = \dim(E)$  valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.  
De plus, il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.  
De plus, il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.



**Preuve.**

□

**Exercice.** Que peut-on dire de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  ?