Couples de variables aléatoires discrètes

1	1.1 1.2	épendance de deux variables aléatoires Indépendance d'évènements	2 2 2				
2		néralités sur les couples de variables aléa- res réelles	3				
3	Couples de variables aléatoires discrètes						
	3.1	Loi d'un couple de variables discrètes	4				
	3.2	Lois marginales	5				
	3.3	Lois conditionnelles	7				
4	Variable aléatoire fonction de deux variables						
	aléa	atoires discrètes	8				
	4.1	Fonction d'un couple de variables aléatoires					
		discrètes	8				
	4.2	Somme de deux variables indépendantes : le					
		produit de convolution discret	9				
	4.3	Stabilité des lois binomiales et de Poisson	10				
	4.4	Minimum et maximum de deux variables	11				
5	Covariance, corrélation linéaire						
	5.1	Espérance d'un produit	13				
	5.2	Covariance	14				
	5.3	Coefficient de corrélation linéaire	17				

Compétences attendues.

- ✓ Obtenir la loi d'un couple (X,Y), ses lois marginales.
- \checkmark Déterminer la loi de X+Y à l'aide du produit de convolution discret.
- ✓ Déterminer la loi de min(X,Y) et max(X,Y).
- ✓ Calculer une covariance.
- ✓ Étudier l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

Mathieu Mansuy

Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)

Page personnelle: mathieu-mansuy.fr/ E-mail: mathieu.mansuy@ac-besancon.fr

1 Indépendance de deux variables aléatoires

1.1 Indépendance d'évènements

Définition.

Deux événements A et B sont dits indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarques.

- Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(B) = P_A(B)$.
- La plupart du temps, l'indépendance se déduit de la situation. Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne donne pas d'information sur la réalisation de l'autre.

1.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Dans cette section, X et Y sont deux variables aléatoires (discrètes ou non) d'un espace probabilisé (Ω, \mathscr{A}, P) .

Définition.

On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes lorsque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les évènements $[X \leq x]$ et $[Y \leq y]$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$P([X \le x] \cap [Y \le y]) = P(X \le x)P(Y \le y).$$

– Propriété 1 –

Soient X et Y deux variables aléatoires (discrètes ou non) d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tous intervalles I et J de \mathbb{R} :

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P(X \in I)P(Y \in J).$$

Remarques.

- L'indépendance de deux variables aléatoires se déduit souvent de la situation.
- L'indépendance de X et de Y signifie que tout événement formé à partir de X est indépendant de tout événement formé à partir de Y.

- Propriété 2 ——

Si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g dont les ensembles de définition contiennent respectivement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, les variables aléatoires f(X) et g(Y) sont indépendantes.

- Propriété 3 (Cas de variables aléatoires discrètes) ----

Les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :

$$P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x) \times P(Y = y).$$



2 Généralités sur les couples de variables aléatoires réelles

Dans cette section, X et Y sont deux variables aléatoires (discrètes ou non) d'un espace probabilisé (Ω, \mathscr{A}, P) .

Définition.

On appelle couple des variables aléatoires X et Y et on note (X,Y) l'application :

$$(X,Y) \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega),Y(\omega)) \end{array} \right. .$$

Définition.

• On appelle loi du couple aléatoire (X,Y) (ou loi conjointe de (X,Y)) la donnée de la fonction $F_{(X,Y)} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, appelée fonction de répartition conjointe, définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x,y) = P([X \le x] \cap [Y \le y]).$$

• La loi de X est appelée la première loi marginale du couple (X,Y), et la loi de Y la seconde loi marginale de (X,Y).

Remarque. Notons que $(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Ainsi, on ne donnera pas en général l'ensemble image $(X,Y)(\Omega)$ du couple (X,Y) (qui peut être difficile à déterminer), mais plutôt $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Propriété 4

Les variables X et Y sont indépendantes si, et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

où F_X, F_Y sont les fonctions de répartition de X et Y.

Propriété 5

On suppose que :

- les couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont la même loi conjointe,
- g est une fonction continue^a sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} .

Alors les variables aléatoires $g(X_1, Y_1)$ et $g(X_2, Y_2)$ ont la même loi.

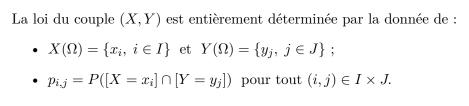
^aPour la définition de la continuité d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , je vous renvoie au Chapitre 15. Fonctions de plusieurs variables.

3 Couples de variables aléatoires discrètes

Dans toute la suite, X et Y sont des variables discrètes dont on fixera une numérotation de leurs ensembles images (avec $I = [\![1,n]\!]$ ou $\mathbb N$ et $J = [\![1,m]\!]$ ou $\mathbb N$ selon que X et Y soient finies ou non) :

$$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$$
 et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}.$

Loi d'un couple de variables discrètes



Notation.

$$[X = x_i, Y = y_j] = [X = x_i] \cap [Y = y_j] = [(X, Y) = (x_i, y_j)]$$

Remarque. Lorsque X et Y sont finies, la loi du couple (X,Y) peut être représentée par un tableau à double entrée.

X	y_1	y_2		y_m
x_1	$p_{1,1} = P([X = x_1] \cap [Y = y_1])$	$p_{1,2}$	• • •	$p_{1,m}$
x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$		$p_{2,m}$
:	:	:		:
x_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$		$p_{n,m}$

Exercice. Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés, X la variable aléatoire donnant le plus petit résultat et Y le plus grand. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

La famille $([X=x_i]\cap [Y=y_j])_{(i,j)\in I\times J}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, la famille $(P([X=x_i]\cap [Y=y_j]))_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j} = 1.$$

Remarque. Lorsque les variables X et Y sont finies et que la loi de (X,Y) est représentée par un tableau, la somme de toutes les probabilités du tableau vaut 1.

Propriété 8

Soient I et J des ensembles finis ou dénombrables, et soit $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels satisfaisant :

$$(1) \ \forall (i,j) \in I \times J, \, p_{i,j} \ge 0 ;$$

(2) la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Alors la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ définit une loi conjointe de probabilité, c'est-à-dire qu'il existe un couple de variables discrètes (X,Y) sur un espace probabilisé (Ω,\mathscr{A},P) tel que :

$$X(\Omega) \times Y(\Omega) = I \times J$$
 et $\forall (i,j) \in I \times J, \ P([X=i] \cap [Y=j]) = p_{i,j}$.

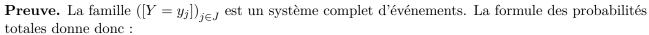
3.2 Lois marginales

Propriété 9 —

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoire. Alors :

$$\forall i \in I, \quad p_i = P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

$$\forall j \in J, \quad q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i \in I} p_{i,j}.$$



$$\forall i \in I, \ P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

Remarque. Lorsque la loi de (X, Y) est **finie**, représentée par un tableau, on obtient $P(X = x_i)$ en sommant les termes de la *j*-ème ligne et $P(Y = y_j)$ en sommant les termes de la *j*-ème colonne :

Y X	y_1	y_2		y_m	Somme par lignes 1 ^{ère} loi marginale ↓
x_1	$P([X = x_1] \cap [Y = y_1])$	$P([X=x_1] \cap [Y=y_2])$		$P([X = x_1] \cap [Y = y_m])$	$P([X=x_1])$
x_2	$P([X=x_2] \cap [Y=y_1])$	$P([X=x_2] \cap [Y=y_2])$		$P([X=x_2] \cap [Y=y_m])$	$P([X=x_2])$
i i	<u>:</u>	:	٠.	:	<u>:</u>
x_n	$P([X=x_n] \cap [Y=y_1])$	$P([X=x_n] \cap [Y=y_2])$		$P([X=x_n] \cap [Y=y_m])$	$P([X=x_n])$
Somme par colonnes $2^{\mathrm{\grave{e}me}}$ loi marginale \rightarrow	$P([Y=y_1])$	$P([Y=y_2])$		$P([Y=y_m])$	Somme totale = 1

Exercice. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y) dans l'exercice précédent.

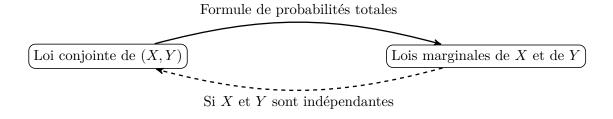
X	Y = 1	Y=2	Y = 3	Y=4	Y=5	Y = 6	
X = 1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	
X=2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	
X = 3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	
X=4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	
X = 5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	
X = 6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	

🙇 À retenir. Lien entre loi conjointe et lois marginales.

- À partir de la loi conjointe de (X, Y), on peut obtenir les lois marginales de X et de Y. En revanche, il n'est en général pas possible de retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales (voir le tableau ci-dessus : il n'y a pas de lien entre les p_i, q_j et les $p_{i,j}$).
- Il y a un cas cependant où c'est possible : lorsque les variables X et Y sont indépendantes,

$$p_{i,j} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P([X = x_i])P(Y = y_j]) = p_i \times q_j.$$

Dans le cas **indépendant**, la loi conjointe se retrouve à partir des lois marginales par produit.



Exercice. Soit $p \in]0,1[$, et soit la famille $(p_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \ p_{m,n} = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{m!(n-m)!} & \text{si } n \ge m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $(p_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est la loi conjointe d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes, et déterminer les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ?

3.3 Lois conditionnelles

Définition.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes, et soit $i \in I$ tel que $P(X=x_i) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de Y sachant que $[X=x_i]$ la donnée de $Y([X=x_i])$ et des probabilités :

$$\forall j \in J, \quad P_{[X=x_i]}(Y=y_j) = \frac{P([X=x_i] \cap [Y=y_j])}{P(X=x_i)} = \frac{p_{i,j}}{p_i}.$$

On définit de même la loi conditionnelle de X sachant que $[Y = y_j]$.

- Propriété 10 -

On suppose que pour tout $(i, j) \in I \times J$, $P(X = x_i) \neq 0$ et $P(Y = y_j) \neq 0$. Alors pour tout $(i, j) \in I \times J$:

$$\begin{split} P([X=x_i] \cap [Y=y_j]) &= P(Y=y_j) P_{[Y=y_j]}(X=x_i) = P(X=x_i) P_{[X=x_i]}(Y=y_j), \\ P(X=x_i) &= \sum_{j \in J} P(Y=y_j) P_{[Y=y_j]}(X=x_i), \\ P(Y=y_j) &= \sum_{i \in I} P(X=x_i) P_{[X=x_i]}(Y=y_j). \end{split}$$

Preuve. Les premières égalités résultent de la définition des probabilités conditionnelles, les deux dernières formules résultent de la formule des probabilités totales appliquée aux systèmes complets d'événements $([Y=y_j])_{j\in J}$ et $([X=x_i])_{i\in I}$.

Exercice. Reprenons le couple de variables (X,Y) de l'exercice précédent. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X sachant [Y=n].

Variable aléatoire fonction de deux variables aléatoires discrètes 4

Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes 4.1

Propriété 11 -

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes, et $g:X(\Omega)\times Y(\Omega)\to\mathbb{R}$ une fonction. Alors g(X,Y) est une variable aléatoire discrète définie sur (Ω, \mathscr{A}) .

Exemple. X+Y, XY, $\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$ sont des variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Propriété 12 (Loi de g(X,Y)) ———

On note
$$Z=g(X,Y)$$
. Pour tout $z\in Z(\Omega)$:
$$P(Z=z)=\sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\\g(x,y)=z}}P([X=x]\cap [Y=y]).$$

Théorème 13 (de transfert double : espérance de g(X,Y))

La variable aléatoire Z = g(X,Y) admet une espérance si, et seulement si, la famille $(g(x_i, y_j)P([X = x_i] \cap [Y = y_j]))_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable.

Dans ce cas:

$$E(Z) = \sum_{(i,j) \in I \times J} g(x_i, y_j) P([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

- Corollaire 14 (Linéarité de l'espérance) —

Soient X et Y des variables aléatoires admettant une espérance. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance, et :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Preuve. Soit $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = \lambda x + \mu y$. D'après le théorème de transfert, Z = g(X, Y) admet une espérance si, et seulement si, la famille des

$$g(x_i, y_i)P([X = x_i] \cap [Y = y_i]) = \lambda x_i P([X = x_i] \cap [Y = y_i]) + \mu y_i P([X = x_i] \cap [Y = y_i])$$

est sommable. Appliquons le théorème de Fubini pour la famille $(x_i P([X=x_i])_{(i,j) \in I \times J})$:

• la série $\sum_{j} |x_i| P([X=x_i] \cap [Y=y_j])$ converge d'après la formule des probabilités totales, et on

$$\sum_{i \in J} |x_i| P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = |x_i| P(X = x_i).$$

• la série $\sum_{i} |x_i| P([X=x_i])_{i \in I}$ est convergente car X admet une espérance.

Par le théorème de Fubini, la famille $(x_iP([X=x_i]\cap [Y=y_j]))_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P([X=x_i]\cap [Y=y_j]) = E(X).$$

De même, on montre que la famille $(y_jP([X=x_i]\cap [Y=y_j]))_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, de somme égale à E(Y). On peut donc conclure que la famille $(g(x_i,y_j)P([X=x_i]\cap [Y=y_j]))_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable en tant que somme de deux familles sommables. E(Z) existe donc bien, et vaut :

$$\begin{split} E(Z) &= \sum_{(i,j) \in I \times J} g(x_i, y_j) P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \\ &= \sum_{\text{tout converge}} \lambda \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) + \mu \sum_{(i,j) \in I \times J} y_j P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \\ &= \lambda E(X) + \mu E(Y). \end{split}$$

4.2 Somme de deux variables indépendantes : le produit de convolution discret

Propriété 15 (Produit de convolution discret) ——

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes. Alors la loi de Z=X+Y est donnée par :

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega), \\ z-x \in Y(\Omega)}} P(X=x, Y=z-x).$$

On dit que la loi de Z = X + Y est le produit de convolution des lois de X et Y.

Preuve.

Corollaire 16

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N},$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k).$$

Preuve.

Exercice. On lance indéfiniment une pièce de monnaie truquée de sorte que le côté pile est obtenu avec la probabilité p (avec 0). On note <math>X le rang du premier pile obtenu et Y celui du deuxième.

- 1. Déterminer les lois de X et Y X.
- 2. Justifier que X et Y-X sont indépendantes. En déduire la loi de Y.

4.3 Stabilité des lois binomiales et de Poisson

- Propriété 17 (Stabilité des lois de Poisson) —

 $\textit{Hypothèses}: \left| \begin{array}{c} X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu) \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{array} \right|$

Alors $X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu)$.

Preuve.

Lemme. Pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, pour tout $0 \le \ell \le n_1 + n_2$:

$$\sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{\ell-k} = \binom{n_1+n_2}{\ell}$$
 (formule de Vandermonde)

en prenant pour convention que $\binom{n}{k} = 0$ si $k \notin [0, n]$.

Propriété 18 (Stabilité des lois binomiales) -

$$\begin{array}{c|c} \textit{Hypothèses}: & X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \\ \text{Alors } X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p). \end{array}$$

Preuve.

Minimum et maximum de deux variables

– Propriété 19 —

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, $Z = \max(X, Y)$. Alors :

- $\forall z \in \mathbb{R}$, $[Z \le z] = [X \le z] \cap [Y \le z]$;
- Si de plus les variables X et Y sont $\mathbf{indépendantes}$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(Z \le z) = P(X \le z) \times P(Y \le z).$$

Preuve.



Méthode. Loi d'un maximum.

Pour déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$ dans le cas où X et Y sont **indépendantes** à valeurs dans \mathbb{N} , il faudra donc :

- (i) calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X \le n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$, et de même pour $P(Y \le n)$;
- (ii) montrer comme ci-dessus que $P(Z \le n) = P(X \le n) \times P(Y \le n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) conclure en utilisant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Z = n) = P(Z \le n) P(Z \le n 1)$.

Exercice. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$.

- Propriété 20 –

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, $Z = \min(X, Y)$. Alors :

- $\forall z \in \mathbb{R}, [Z > z] = [X > z] \cap [Y > z];$
- Si de plus les variables X et Y sont indépendantes, alors :

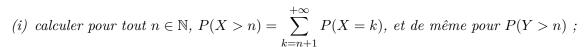
$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(Z > z) = P(X > z) \times P(Y > z).$$

Preuve. Laissée en exercice.



Méthode. Loi d'un minimum.

Pour déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$ dans le cas X, Y indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , il faudra donc :



- (ii) montrer comme ci-dessus que P(Z > n) = P(X > n)P(Y > n) pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) conclure en utilisant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P(Z=n) = P(Z>n-1) P(Z>n).

5 Covariance, corrélation linéaire

5.1 Espérance d'un produit

Lemme. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|xy| \le \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Preuve.

- Propriété 21 –

Soient X,Y des variables aléatoires discrètes **admettant une variance**. Alors XY admet une espérance et :

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P([X=x_i]\cap [Y=y_j]).$$

Preuve.

- Propriété 22

Soient X,Y des variables aléatoires discrètes et **indépendantes**. On suppose que X et Y admettent une **espérance**. Alors XY admet une espérance et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Preuve. On applique le théorème de transfert double. Pour cela, on étudie si la famille $(x_iy_jP([X=x_i]\cap [Y=y_j]))_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable. Pour tout $(i,j)\in I\times J$, on a :

$$|x_i y_j P([X = x_i] \cap [Y = y_j])| \underbrace{=}_{X \text{ et } Y \text{ indépendantes}} |x_i y_j| P([X = x_i]) P([Y = y_j])$$

$$= (|x_i| P(X = x_i))(|y_j| P(Y = y_j)).$$

Comme X et Y admettent une espérance, les séries des $(|x_i|P(X=x_i))$ et $(|y_j|P(Y=y_j))$ convergent. La famille est donc bien sommable, et on en déduit par le théorème de transfert que E(XY) existe. De plus :

$$\begin{split} E(XY) &= \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j P([X=x_i] \cap [Y=y_j]) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i P([X=x_i]) \times y_j P([Y=y_j]) \\ &= \left(\sum_{i \in I} x_i P([X=x_i])\right) \times \left(\sum_{j \in J} y_j P([Y=y_j])\right) = E(X) E(Y) \end{split}$$

5.2 Covariance

Définition.

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes admettant une variance (ou de manière équivalente un moment d'ordre 2). On appelle covariance de X et Y le réel :

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

On dit que X et Y sont non corrélées si Cov(X, Y) = 0.

Remarque. Cov(X, Y) existe bien car X - E(X) et Y - E(Y) admettent toutes deux une variance, et donc leur produit admet une espérance.

Théorème 23 (Formule de Huygens (1629 - 1695))

Si X et Y admettent toutes deux une variance, alors :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Preuve.

Propriété 24 (Covariance avec une variable aléatoire constante) -

Si X admet une variance et Y=a p.s. alors Cov(X,Y)=0. En particulier, Cov(X,a)=0.

Preuve. Si Y=a presque surement, alors Y-E(Y)=Y-a=0 presque surement. Ainsi (X-E(X))(Y-E(Y))=0 presque surement et :

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = 0.$$

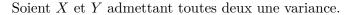
On suppose que X, Y, Z, T admettent toutes une variance. Alors :

- $Sym\acute{e}trie : Cov(X, Y) = Cov(Y, X).$
- Bilinéarité (i.e. linéaire par rapport à chacune des variables) :
 - linéarité à gauche : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda Cov(X, Z) + \mu Cov(Y, Z)$;
 - linéarité à droite : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(X, \lambda Z + \mu T) = \lambda Cov(X, Z) + \mu Cov(X, T)$;
- Positivit'e: pour toute variable aléatoire discrète X admettant une variance, on a :

$$Cov(X, X) = V(X) \ge 0.$$

Preuve.

- Propriété 26 -



Si X et Y sont indépendantes, alors Cov(X, Y) = 0.

Preuve.



Mise en garde.

Si $Cov(X,Y) \neq 0$, alors X et Y ne sont pas indépendantes. Mais attention, la réciproque est fausse : on peut avoir Cov(X,Y)=0 avec X et Y non indépendantes.

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.On pose S = X + Y et U = X - Y.

1. Montrer que Cov(S, U) = 0.

2. S et U sont-elles indépendantes ?

Théorème 27 (Variance d'une somme)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes admettant chacune une variance.

• La variable aléatoire X + Y admet une variance qui vaut :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y).$$

• Dans le cas où X et Y sont **indépendantes** :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Preuve.



Mise en garde.

La variance n'est pas linéaire : en général, on n'a pas V(X+Y)=V(X)+V(Y).

Remarque. On retiendra en particulier que $Cov(X,Y) = \frac{1}{2}(V(X+Y) - V(X) - V(Y))$, qui permet de calculer la covariance à partir des variances.



R Le saviez-vous?

Le statisticien et chimiste anglais William Gosset (1876 - 1937) travaillait aux brasseries Guiness à Dublin. Dans le but d'améliorer la qualité du houblon, il l'étudia de manière statistique. Cela l'amena à introduire la notion de variance sous le nom de fluctuation. Son compatriote Ronald Fisher (1890 - 1962) préféra la nommer variance, mot qui a pour sens désaccord en anglais. Le préfixe co vient de la préposition latine cum signifiant avec. Ainsi covariance correspond à « désaccord avec ».

L'entreprise Guiness avait pour règle que ses chimistes ne publient pas leurs découvertes. Gosset argua que ses travaux ne seraient d'aucune utilité pour les concurrents et obtint l'autorisation de publier mais sous un pseudonyme, Student, pour éviter les difficultés avec les autres membres de son équipe. C'est ce nom qu'on retrouve aujourd'hui encore associé à de nombreux outils statistiques.



William Gosset, alias Student (1876 - 1937)

5.3 Coefficient de corrélation linéaire

- **Propriété 28** (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) -----

On suppose que X et Y admettent une variance. Alors :

$$|Cov(X, Y)| \le \sigma(X) \ \sigma(Y).$$

Preuve.

- Propriété 29 (Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) -

On suppose que X et Y admettent une variance. On a l'équivalence :

$$\left[\; |\mathrm{Cov}(X,Y)| = \sigma(X) \; \sigma(Y) \; \right]$$

$$\updownarrow$$

$$\left[X \text{ est constante p.s.} \right] \text{ ou } \left[\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \; Y = aX + b \; p.s. \right].$$

De plus, si X n'est pas constante presque sûrement, alors a est du signe de Cov(X,Y).

Preuve.

Définition.

On suppose que X et Y admettent une variance non nulle. On appelle coefficient de corrélation linéaire de (X,Y), et on note $\rho_{X,Y}$, le réel :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Remarque. Le coefficient de corrélation linéaire est la normalisation de la covariance par le produit des écarts types. L'intérêt est que X et Y ne s'expriment pas forcément dans la même unité (par exemple si X représente la température extérieure et Y la facture de chauffage). Cette normalisation permet d'obtenir un réel indépendant des unités de mesure des observations.

- Propriété 30 —

On suppose que X et Y admettent une variance non nulle. Alors :

- (1) $\rho_{X,Y} \in [-1,1]$; (2) $\rho_{X,Y} = 1 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ tel que } Y = aX + b$; (3) $\rho_{X,Y} = -1 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R} \text{ tel que } Y = aX + b$.

Preuve. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du cas d'égalité.

Remarques.

- Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut exister entre un couple de variables aléatoires (X, Y).
 - Si $\rho_{X,Y}$ est proche de 1 ou de -1, la dépendance linéaire entre X et Y est importante. Exemple: X = nombre de remises promotionnelles, Y = volume des ventes.
 - si $\rho_{X,Y}$ est proche de 0 les deux variables sont linéairement indépendantes. Exemple: X = nombre de décès sur les routes de Franche Comté, <math>Y = production decomté.



Mise en garde.

Attention encore une fois de ne pas confondre « indépendance linéaire » et « indépendance » : si $\rho_{X,Y} = 0$ (ou Cov(X,Y) = 0), alors X et Y sont linéairement indépendantes. Mais elles ne sont pas forcément indépendantes : il peut exister une dépendance non linéaire entre les variables, par exemple $Y = e^X, \ln(X), \dots$

- Le signe de $\rho_{X,Y}$ (et de Cov(X,Y)) indique le sens d'évolution d'une variable par rapport à l'autre:
 - $-\sin \rho_{X,Y} > 0$, alors les deux variables évoluent en moyenne dans le même sens. Exemple: X = température extérieure, Y = consommation de crèmes glacées.
 - $-\sin \rho_{X,Y} < 0$, les deux variables évoluent en moyenne en sens inverse. Exemple: X = température extérieure, Y = facture de chauffage.