Chapitre 6

Applications linéaires

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une application est linéaire, calculer son noyau, son image et son rang.
- ✓ Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme.
- ✓ Montrer qu'une application linéaire p est un projecteur, et savoir l'identifier en calculant $\mathrm{Ker}(p), \mathrm{Im}(p)$.
- ✓ Écrire la matrice d'une application linéaire f dans une base $\mathscr{B}$.
- ✓ Écrire une matrice de passage, et l'utiliser dans les formules de changement de bases.
- ✓ Montrer qu'un polynôme est annulateur d'une application linéaire.
- ✓ Montrer qu'un sous-espace est stable par une application linéaire.

Mathieu Mansuy
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-besancon.fr`

1 Applications linéaires

Dans toute la suite, E et F désigneront des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1.1 Définitions

Définition.

Une application $f : E \to F$ est dite *linéaire* si elle satisfait :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall(x,y) \in E^2, \quad f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y).$$

On notera $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque. Notons que $f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_F$. L'image du vecteur nul 0_E par une application linéaire est donc le vecteur nul 0_F.

Exemples.

- Id_E est linéaire. Plus généralement, toute homothétie, c'est-à-dire toute application de la forme $\lambda \cdot \mathrm{Id}_E$, est linéaire.
- La transposition $t : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \mapsto {}^tA$ est linéaire.
- L'application $f_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(a)$ d'évaluation en $a \in \mathbb{R}$ d'un polynôme est linéaire.
- La dérivation $D : \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $D(f) = f'$ est linéaire.
- L'intégration $I : \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $I(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est linéaire.

Méthode. Comment montrer qu'une application est linéaire ?

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire, on reviendra à la définition. On rédigera ainsi :

Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(u,v) \in E^2$, calculons :

$$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \qquad \ldots \qquad \overset{?}{=} \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v).$$

Exercice. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $f((x,y,z)) = (x-y, y-z, z-x)$ est linéaire.

Mise en garde.

Dire qu'une application est « stable par combinaisons linéaires » ne veut rien dire. Un sous-espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires, une application linéaire est juste... linéaire !

Propriété 1

- $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Si $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme*, et on notera $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Si $F = \mathbb{R}$, on dit que f est une *forme linéaire*.

Exemples.

- Les applications Id_E, transposition et f définies précédemment sont des endomorphismes de E, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
- L'application d'évaluation $f_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[x]$.
- L'application trace $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Le saviez-vous ?

Le mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 - 1932) est le premier à donner, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel, ceci à partir des travaux de Grassman. Il introduit les applications linéaires et montre que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes.

On le connait aujourd'hui avant tout pour sa fameuse courbe remplissant un carré : une fonction continue définie sur le segment $[0, 1]$ et surjective sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Mais Peano est aussi l'un des pionniers de la méthode axiomatique moderne : il introduit les entiers naturels à l'aide d'axiomes, c'est-à-dire de propositions non démontrées utilisées comme point de départ de l'arithmétique. On lui doit également les symboles $\cap, \cup, \in$ ou $\exists$ qu'il introduit dans son *Formulaire mathématique* de 1895.

1.2 Noyaux, images

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

Définition.

On appelle *noyau de* f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

Propriété 2

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Méthode. Calcul du noyau d'une application linéaire.
Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on revient à la définition. On rédigera comme suit :

$$\text{Soit } x \in E. \text{ Alors : } \quad x \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_F \Leftrightarrow \quad \dots$$

On sera alors amené à résoudre un système linéaire dont l'ensemble des solutions est $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice. Déterminer le noyau de $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$.

Définition.

On appelle *image de* f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F,\ \exists x \in E\ :\ f(x) = y\}.$$

Propriété 3

- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$.

1.3 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 4

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = x_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

De plus :

- f est injective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est libre.
- f est surjective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est génératrice.
- f est bijective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une base.

Corollaire 5

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Corollaire 6

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose E de dimension finie, et on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, et :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Preuve.

□

1.4 Rang d'une application linéaire

Définition.

On suppose E de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle *rang de f*, et on note $\mathrm{rg}(f)$, l'entier :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Remarque. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors le rang de f est le rang de la famille de vecteurs $\mathscr{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Théorème 7 (*du rang*)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, E supposé de dimension finie. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Mise en garde.

Attention, il s'agit d'une égalité de dimension. En général, on n'a pas $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice. Déterminer le rang et l'image de $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$.

Propriété 8

Soit E de dimension finie, et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire **non nulle**. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E (c'est-à-dire un sous-espace de dimension $\dim(E) - 1$).

Preuve.

$\square$

Pour plus de détails sur les liens entre formes linéaires et hyperplans,

☞ **Complément de cours 2. Formes linéaires et hyperplans.**

Corollaire 9

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

(1) f est bijective ; (2) f est injective ; (3) f est surjective.

Mise en garde.

Attention à bien préciser que $\dim(E) = \dim(F)$ avant d'utiliser ce résultat. C'est en particulier faux en dimension infinie : on peut montrer par exemple que la dérivation $D : f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est surjective mais pas injective.

Preuve. Tout d'abord, on a par définition que $(1) \Rightarrow (2)$ et $(1) \Rightarrow (3)$.

Montrons $(2) \Rightarrow (1)$: f étant injective, $\mathrm{Ker}(f)$ est réduit à $\{0_E\}$ et donc $\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$. Par le théorème du rang, on obtient :

$$\dim(E) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f)$$

Ainsi $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim(E) = \dim(F)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. Donc $\mathrm{Im}(f) = F$ et f est surjective. Étant injective également, elle est bijective.

On montre de manière analogue que $(3) \Rightarrow (1)$. $\square$

Exercice. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f((x, y, z)) = (-2x - y + 2z, -3x - 2y + 2z, -2x)$. Montrer que f est bijective.

1.5 Isomorphismes

Définition.

On dit qu'une application $f : E \to F$ est un *isomorphisme* si f est linéaire et bijective.
Si de plus $E = F$, on dit que f est un *automorphisme de* E.

Propriété 10

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme. Notons $f^{-1} : F \to E$ sa bijection réciproque. Alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.

Propriété 11

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

(1) f est bijective ; (2) $\exists g \in \mathscr{L}(F, E), g \circ f = \mathrm{Id}_E$; (3) $\exists h \in \mathscr{L}(F, E), f \circ h = \mathrm{Id}_F$.

Et dans ce cas, $f^{-1} = g = h$.

Mise en garde.

Attention ici aussi à bien dire que $\dim(E) = \dim(F)$. En particulier, c'est encore faux en dimension infinie : par exemple pour D la dérivation et $I : f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on remarque que $D \circ I = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Pourtant il est facile de voir que D n'est pas injective et que I n'est pas surjective.

Propriété 12

On suppose que E est de dimension finie n, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors l'application :

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & M_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Preuve.

□

Propriété 13

On suppose E et F de dimension finie. Alors il existe un isomorphisme $f : E \to F$ si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.

Preuve. Supposons que $\dim(E) = \dim(F) = n$, et soient $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ des bases de E et F. D'après la propriété précédente, les applications

$$\Phi_{\mathscr{B}_E} : E \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ \Phi_{\mathscr{B}_F} : F \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

sont des isomorphismes. D'où par composition,

$$\Phi_{\mathscr{B}_F}^{-1} \circ \Phi_{\mathscr{B}_E} : E \xrightarrow{\Phi_{\mathscr{B}_E}} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\Phi_{\mathscr{B}_F}^{-1}} F$$

est un isomorphisme de E sur F. Donc E et F sont bien isomorphes.

Réciproquement, s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$, alors

$$\dim(E) = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = 0 + \dim F = \dim(F).$$

$\square$

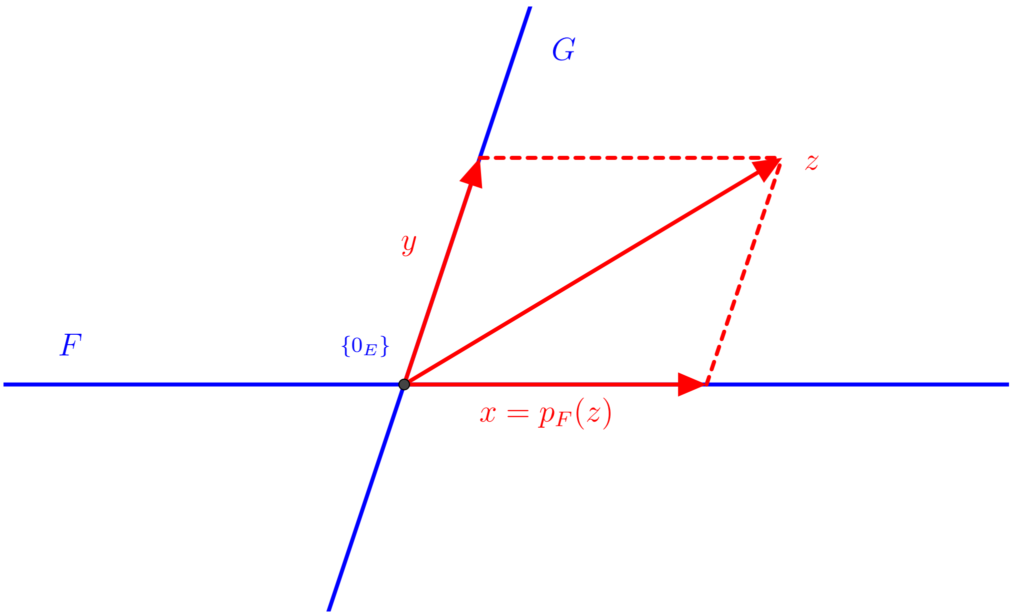
1.6 Projecteurs

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $z \in E$, il existe donc un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$.

- Le vecteur x est appelé *la projection de z sur F parallèlement à G*, et noté $p(z)$.
- L'application $p : E \to E$ ainsi définie est appelée le *projecteur sur F parallèlement à G*

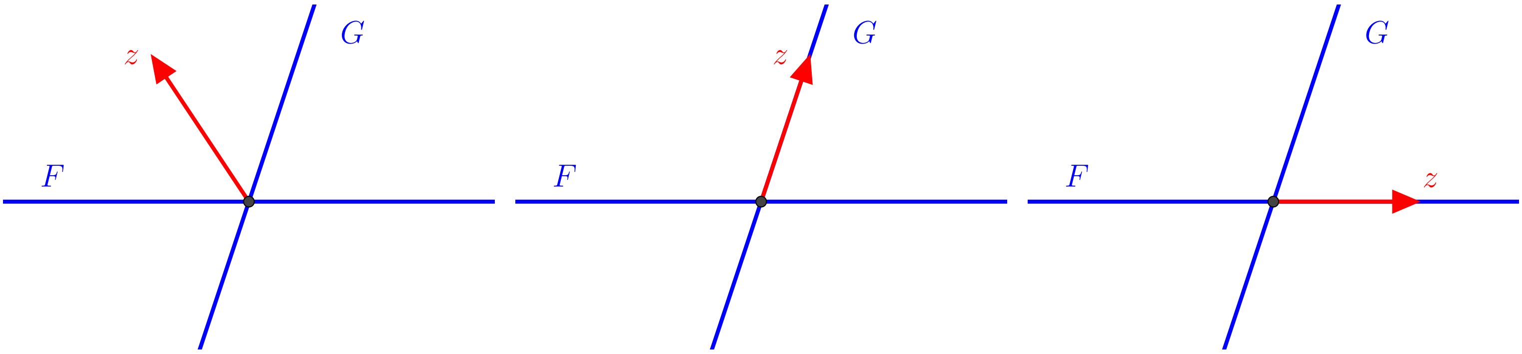
Illustration graphique. Pour projeter z sur F, on trace la parallèle à G passant par l'extrémité de z. La projection x de z sur F est donnée par l'intersection de cette parallèle à G avec F.



Projection sur F parallèlement à G.

Exemple. Notre ombre est la projection de notre silhouette sur le sol parallèlement aux rayons du soleil.

Exemple. Déterminer graphiquement la projection de z sur F parallèlement à G dans les cas suivants.



Propriété 14

(1) p est linéaire.

(2) $p \circ p = p$.

(3) $\mathrm{Ker}(p) = G$ et $\mathrm{Im}(p) = F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. Ainsi :

$$\forall y \in G, \quad p(y) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall x \in F, \quad p(x) = x.$$

Preuve.

$\square$

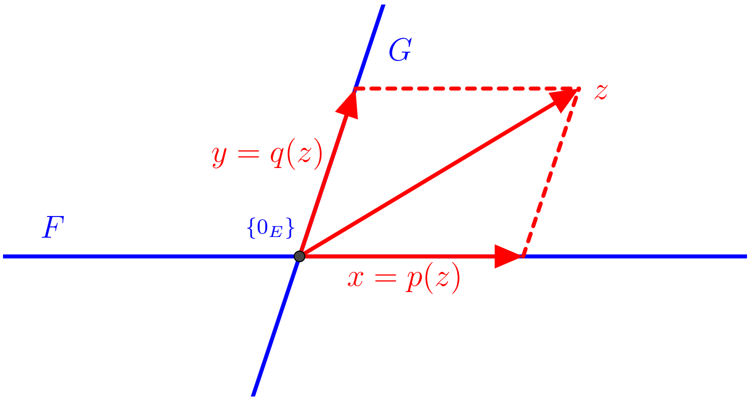
Remarque. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $q = \mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. En effet, si $z \in E$, alors en notant $(x, y) \in F \times G$ tels que $z = x + y$, on remarque que :

$$q(z) = z - p(z) = x + y - x = y.$$

De plus, $p \circ q = p \circ (\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et de même $q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On retiendra donc :

$$p + q = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On dit que p et q sont les *projecteurs associés à la décomposition* $E = F \oplus G$.



Projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$.

Propriété 15

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ est un projecteur} \quad \Leftrightarrow \quad p \circ p = p.$$

Plus précisément, $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Preuve. On a déjà montré l'implication $\Rightarrow$. Montrons la réciproque. Pour cela, commençons par montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Analyse. Soit $z \in E$, on cherche $(x, y) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$ tel que $z = x + y$.

Puisque $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $t \in E$ tel que $y = p(t)$. On obtient en composant par p :

$$p(z) = p(x) + p(y) = p(y) = p \circ p(t) = p(t) = y.$$

Ainsi, $y = p(z)$ et $x = z - p(z)$.

Synthèse. Soit $z \in E$, posons $y = p(z)$ et $x = z - p(z)$. Montrons que :

$$z = x + y, \quad x \in \mathrm{Ker}(p) \quad \text{et} \quad y \in \mathrm{Im}(p).$$

Tout est clair, sauf peut-être $x \in \mathrm{Ker}(p)$:

$$p(x) = p(z - p(z)) = p(z) - p \circ p(z) = 0_E.$$

Conclusion. Pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$ tel que $z = x + y$, ce qui se traduit par $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Soit $z \in E$. Écrivons $z = \underbrace{p(z)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{(z - p(z))}_{\in \mathrm{Ker}(p)}$. Si q est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$, alors $q(z) = p(z)$. Ainsi $q = p$, c'est-à-dire p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. $\square$

Définition.

Soient F et G des sous-espaces supplémentaires de E, et soit p et q les projecteurs associés. On appelle *symétrie par rapport à F dans la direction de G* l'endomorphisme $s = p - q = \mathrm{Id}_E - 2q$.

Pour une étude des propriétés d'une symétrie vectorielle,

☞ **Complément de cours 3. Symétries vectorielles.**

2 Matrices et applications linéaires

2.1 Matrice d'une application linéaire

Définition.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle *matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*, notée $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$:

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \quad \text{où} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

Remarque. $\dim(E)$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(F)$ = nombre de lignes de la matrice.

Cas d'un endomorphisme. $E = F$, on prend alors la même base au départ et à l'arrivée $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on note plus simplement $M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple. $M_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$.

Exercice. Écrire la matrice de $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 16

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

- Si $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \mu \cdot M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g).$$

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors :

$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Corollaire 17

Soient E et F de dimension finie n et p, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E et F.

- L'application $\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Si E et F sont tous deux de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi de dimension finie et :
$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Preuve.

$\square$

Propriété 18

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n munis respectivement des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ est un isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas : $\quad (M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))^{-1} = M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)$.

Preuve.

$\Rightarrow$ Supposons f inversible, de sorte que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. Par la Propriété 16 :

$$M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) \times M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n \quad \text{et} \quad M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) = M_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_F) = I_n.$$

Ce qui prouve que $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible, d'inverse $M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)$.

$\Leftarrow$ Notons $A = M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et supposons A inversible. Puisque $\Phi_{\mathscr{C},\mathscr{B}} : h \in \mathscr{L}(F,E) \mapsto M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(h) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est surjective (c'est un isomorphisme d'après le corollaire précédent), il existe une application linéaire $g \in \mathscr{L}(F,E)$ telle que $M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g) = A^{-1}$. Puisque $A \times A^{-1} = I_n$, il suit :

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g) = M_{\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_F) \quad \Rightarrow \quad M_{\mathscr{C}}(f \circ g) = M_{\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_F).$$

Par injectivité de $\Phi_{\mathscr{C},\mathscr{C}} : h \in \mathscr{L}(F,F) \mapsto M_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(h) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Par la Propriété 11, f est un isomorphisme et $g = f^{-1}$.

$\square$

Propriété 19

Supposons E et F de dimension finie, et considérons $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x \in E$. Notons alors :

- A la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$;
- X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$;
- Y la matrice colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Alors :

$$Y = AX.$$

2.2 Matrices de passage

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $M_{\mathscr{B}}(f)$ et $M_{\mathscr{B}'}(f)$ sont a priori deux matrices différentes. Nous expliquons ici comment passer de l'une à l'autre.

Définition.

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

On appelle *matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$* la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$.

Plus précisément, si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ et $P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, alors :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_j & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \quad \text{où} \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i.$$

Remarque. Par définition, on a $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$ puisque :

$$M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{Id}(e'_1) & \dots & \mathrm{Id}(e'_j) & \dots & \mathrm{Id}(e'_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}.$$

Exercice. Considérons la famille $\mathscr{B} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (1,2,1,0), (1,3,3,1))$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ à la base $\mathscr{B}$.

Propriété 20

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E de dimension finie. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible, d'inverse :

$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$

Preuve.

□

2.3 Changement de bases

Propriété 21

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Notons :

- X la matrice de x dans la base $\mathscr{B}$;
- X' la matrice de x dans la base $\mathscr{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors :

$$X = PX'.$$

Preuve.

□

Théorème 22 (*de changement de bases*)

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons :

- A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$;
- A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

En particulier, les matrices A et A' sont semblables.

Preuve.

$\square$

Exercice. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Écrire explicitement $f(u)$ pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, avec $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{C}$.
4. En déduire la matrice de f^n dans $\mathscr{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Retour sur le rang d'une matrice

Propriété 23

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Le rang de $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est égal au rang de l'application linéaire f.

Preuve.

□

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle *application linéaire canoniquement associée à A* l'application :

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & A \cdot X \end{array} \right.$$

.

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

- On appelle *noyau de A*, et on note $\mathrm{Ker}(A)$, le noyau de φ_A. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ A \cdot X = 0_{n,1}\}.$$

- On appelle *image de A*, en note $\mathrm{Im}(A)$, l'image de φ_A. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(A) = \{A \cdot X,\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\} = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\ :\ Y = A \cdot X\}.$$

Propriété 24

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

(1) La matrice dans les bases canoniques de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de φ_A coïncide avec A.

(2) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi_A)$.

(3) Théorème du rang : $\quad p = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$.

Preuve.

□

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(A), \mathrm{Im}(A), \mathrm{rg}(A)$.

Propriété 25

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dispose des équivalences suivantes :

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = n.$$

Preuve. Puisque A est carrée, $\varphi_A \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et sa matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est A, de sorte que :

$$\begin{aligned} A \text{ inversible } &\Leftrightarrow \varphi_A \text{ bijective } \Leftrightarrow \varphi_A \text{ injective } (\Leftrightarrow \mathrm{Ker} A = \{0_{n,1}\}) \\ &\Leftrightarrow \varphi_A \text{ surjective } (\Leftrightarrow \mathrm{Im} A = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n. \end{aligned}$$

□

Propriété 26

(1) Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases distinctes.

(2) Deux matrices semblables ont même rang.

Preuve.

□

Mise en garde.

La réciproque est fausse : deux matrices de même rang ne sont pas forcément semblables. Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont de rang 2, mais elles ne sont pas semblables puisque la seule matrice semblable à I_2 est I_2.

2.5 Retour sur les projecteurs

On suppose que E est de dimension finie n.

Propriété 27

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est un projecteur de rang r ;

(2) il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ fois}}) = A_r \ ;$$

(3) $M_{\mathscr{B}}(f)$ est semblable à A_r.

Preuve.

$\square$

Remarque. Il est donc aisé d'écrire la matrice d'un projecteur f dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$. Et pour obtenir la matrice de f dans une autre base, on appliquera les formules de changement de bases.

3 Polynômes d'un endomorphisme

3.1 Définition et propriétés

Définition.

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{R}$, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_d f^d + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$$

où $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$.

Exemple. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P : x \mapsto x^2 + 3x - 10$, $P(f) = f^2 + 3f - 10\mathrm{Id}_E$.

Mise en garde.

Le terme constant a_0 dans P devient $a_0 \mathrm{Id}_E$ dans $P(f)$.

Propriété 28

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) $(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$; (2) $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Remarque. Il est important de bien identifier les objets mathématiques concernés :

$$(\underbrace{P \times Q}_{\substack{\text{produit}\\ \text{de}\\ \text{polynômes}}})(f) = \underbrace{P(f) \circ Q(f)}_{\substack{\text{composition}\\ \text{d'endomorphismes}}}$$

Mise en garde.

Pour $x \in E$, ne pas confondre $P(f)(x)$ et $P(f(x))$:

$$P(f(x)) = a_n(f(x))^n + \cdots + a_1 f(x) + a_0$$

n'a pas de sens (pas de produit dans E). Alors que $P(f)(x)$ est l'évaluation en $x \in E$ de l'endomorphisme $P(f) \in \mathscr{L}(E)$.

Propriété 29

(1) Les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent : $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

(2) Si A est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, alors $P(A)$ est la matrice de $P(f)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Preuve.

(1) $P(f) \circ Q(f) \overset{\text{prop. 28}}{=} (P \times Q)(f) \overset{\times \text{ commut. dans } \mathbb{R}[x]}{=} (Q \times P)(f) \overset{\text{prop. 28}}{=} Q(f) \circ P(f)$

(2) En notant $P : x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A) &= a_n A^n + \ldots a_1 A + a_0 I_n = a_n M_{\mathscr{B}}(f)^n + \cdots + a_1 M_{\mathscr{B}}(f) + a_0 M_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) \\ &\overset{\text{prop. 16}}{=} a_n M_{\mathscr{B}}(f^n) + \cdots + a_1 M_{\mathscr{B}}(f) + a_0 M_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = M_{\mathscr{B}}(a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E) \\ &= M_{\mathscr{B}}(P(f)). \end{aligned}$$

□

3.2 Polynômes annulateurs

Définition.

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que P est un *polynôme annulateur de* f lorsque $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exemple. Polynôme annulateur :

- d'une homothétie $\lambda \cdot \mathrm{Id}_E$ de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$:
- d'un projecteur p :

Propriété 30

P est un polynôme annulateur de f si, et seulement si, P est un polynôme annulateur de sa matrice dans une base quelconque.

Preuve. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $A = M_{\mathscr{B}}(f)$. D'après le point (2) de propriété 29, $P(A) = M_{\mathscr{B}}(P(f))$. Ainsi :

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow M_{\mathscr{B}}(P(f)) = 0_n \Leftrightarrow P(A) = 0_n.$$

□

Propriété 31

(1) On suppose que E est de **dimension finie**.
Tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur non nul.

(2) Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur non nul.

Preuve.

□

Propriété 32

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et P un polynôme annulateur de f.
Si $P(0) \neq 0$, alors f est inversible. De plus f^{-1} est un polynôme en f.

4 Sous-espaces stables

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable par f* si :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Exemples.

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Remarquons que $f(\{0_E\}) = \{0_E\}$ et $f(E) \subset E$. Ainsi, les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par f.
- Soit $E = \mathbb{R}[x]$, $f : P \in E \to P' \in E$, et $F = \mathbb{R}_n[x]$.
  Si $\deg(P) \leq n$, alors $\deg(f(P)) = \deg(P') \leq n-1$ et donc $f(P) \in F$. Donc $F = \mathbb{R}_n[x]$ est stable par f.

Propriété 33

On suppose que $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.
F est stable par f si, et seulement si, $f(e_i) \in F$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

Preuve.

$\square$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (5x + 3y, -6x - 4y)$. Montrer que $\text{Vect}((1, -2))$ est stable par f.

Propriété 34

Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent.
Alors les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont stables par f.

Preuve.

$\square$

Propriété 35

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(P(f))$ et $\text{Im}(P(f))$ sont stables par f.

(2) Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par f.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{Id}_E)$ est stable par f.

Preuve.

(1) Les endomorphismes $P(f)$ et f sont des polynômes en f donc ils commutent. On peut donc appliquer la proposition précédente.

(2) et (3) Il suffit d'appliquer le point précédent pour $P = X$, puis pour $P = X - \lambda$.

$\square$

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.
L'application $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un endomorphisme de F appelé *endomorphisme induit par f sur F*.

Remarque. L'hypothèse « F stable par f » assure que l'application induite $\tilde{f}$ est à valeurs dans F.

Exemple. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors F et G sont des sous-espaces stables par p puisque

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \in F \qquad \text{et} \qquad \forall y \in G, \quad p(y) = 0_E \in G.$$

Ainsi p induit un endomorphisme $\tilde{p}$ sur F qui n'est autre que Id_F, et un endomorphisme $\bar{p}$ sur G qui est l'endomorphisme nul.

Propriété 36

Supposons E de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F qu'on complète en $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots e_n)$ une base de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Il y a équivalence entre :

(1) F est stable par f ;

(2) $M_{\mathscr{B}}(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$ (matrice triangulaire par blocs).

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que F est stable par f. Pour tout $j = 1, \dots, p$, e_j appartient à F. Par stabilité, $f(e_j)$ appartient donc aussi à $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Ainsi, il existe $a_{1,j}, \dots, a_{p,j} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(e_j) = a_{1,j} \cdot e_1 + \dots + a_{p,j} \cdot e_p = a_{1,j} \cdot e_1 + \dots + a_{p,j} \cdot e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \dots + 0 \cdot e_n.$$

On peut donc écrire :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & \dots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & & & \\ \vdots & & \vdots & & (*) & \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & (\star) & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

où $(*)$ et $(\star)$ sont les coefficients des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ dans la base $\mathscr{B}$. Donc $M_{\mathscr{B}}(f)$ est bien de la forme attendue.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supposons que $M_{\mathscr{B}}(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$. Pour tout $j = 1, \dots, p$, on a par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base que (en notant $A = (a_{i,j})$) :

$$f(e_j) = a_{1,j} \cdot e_1 + \dots + a_{p,j} \cdot e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \dots + 0 \cdot e_n = a_{1,j} \cdot e_1 + \dots + a_{p,j} \cdot e_p$$

appartient à $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Ceci étant vrai pour tout $j = 1, \dots, p$, F est donc bien stable par f.

□