Chapitre 5

Variables aléatoires discrètes

1 Généralités sur les variables aléatoires réelles 2
1.1 Définitions 2
1.2 Fonction de répartition 3

2 Rappels sur les variables aléatoires discrètes 4
2.1 Définitions 4
2.2 Loi d'une variable aléatoire discrète 4

3 Moments d'une variable aléatoire discrète 6
3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète . . 6
3.2 Théorème de transfert 8
3.3 Moments d'ordre supérieur, variance 9

4 Espérance totale 11

5 Lois discrètes usuelles 13
5.1 Expériences associées aux différentes lois classiques. 13
5.2 Simulation en `Python` 14
5.3 Table des lois discrètes usuelles 14

Compétences attendues.

- ✓ Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète.
- ✓ Utiliser la formule de l'espérance totale.
- ✓ Reconnaitre et utiliser une loi usuelle.

Mathieu Mansuy
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-besancon.fr`

1 Généralités sur les variables aléatoires réelles

Dans tout le chapitre, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1.1 Définitions

Définition.

Une *variable aléatoire réelle* est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}.$$

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in I\} \in \mathscr{A}.$$

Propriété 2

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, λ un réel quelconque. Alors $X + Y$, XY, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ et λX sont des variables aléatoires réelles.

Propriété 3

Soit $A \in \mathscr{A}$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$ est une variable aléatoire réelle.

Preuve.

□

Remarques.

- La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.
- Il est très rare qu'on vous demande de montrer qu'une application est bien une variable aléatoire. Si tel est le cas, il faut se ramener à la définition comme on vient de le faire pour $\mathbb{1}_A$.

1.2 Fonction de répartition

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *fonction de répartition de X* la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x).$$

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire réelle, F_X sa fonction de répartition. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$:

$$P(X > a) = 1 - F_X(a) \qquad ; \qquad P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *loi de X* la donnée des probabilités $P(X \in I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire réelle. La loi de X est caractérisée par sa fonction de répartition F_X.

Théorème 6 (Caractérisation d'une fonction de répartition)

Une application $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si, et seulement si, elle satisfait les trois points suivants :

(i) F est croissante sur $\mathbb{R}$;

(ii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$;

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

De plus, on dispose de l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - \lim_{t \to x^-} F(t).$$

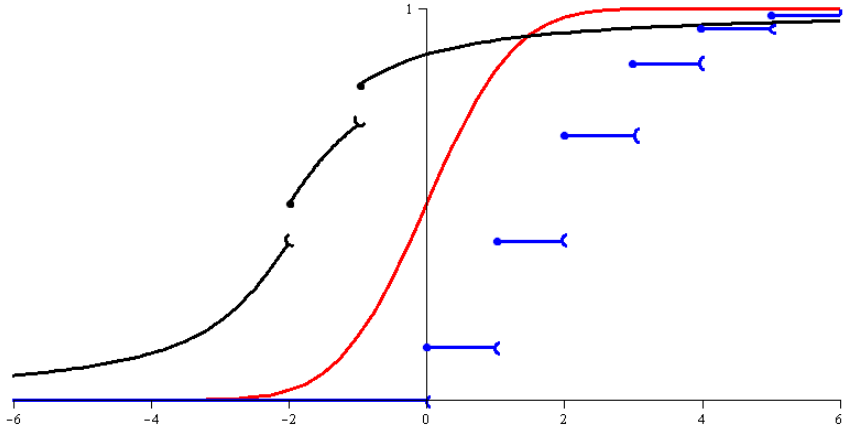
Propriété 7

Soit F une fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Alors F est continue à gauche (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini ou dénombrable de points x_i en lesquels on a seulement la continuité à droite :

$$\lim_{x \to x_i^-} F(x) < F(x_i) = \lim_{x \to x_i^+} F(x).$$

Exemple. Les trois courbes suivantes sont celles de fonctions de répartitions de variables aléatoires réelles.



En effet, elles sont toutes les trois croissantes, continues sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre dénombrable de points où elles sont seulement continues à droite, et elles sont bien de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$.

2 Rappels sur les variables aléatoires discrètes

2.1 Définitions

Définition.

Une variable aléatoire réelle X est dite *discrète* lorsque son *ensemble image* $X(\Omega)$, i.e. l'ensemble des valeurs prises par X, est dénombrable.

On dit plus précisément que X est une variable *discrète finie* lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini et *discrète infinie* lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

Exemples.

- Si $A \in \mathscr{A}$, alors $\mathbb{1}_A$ est discrète finie car $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors X est discrète infinie car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Toutes les variables aléatoires considérées dans la suite de ce chapitre seront supposées discrètes.

2.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Propriété 8

Une application $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X si, et seulement si, elle satisfait les points suivants :

(i) F est croissante sur $\mathbb{R}$;

(ii) F est en escalier et continue à droite ;

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{\substack{z \in X(\Omega) \\ z \leqslant x}} P(X = z)$$

Exercice. Soit X la variable donnant la valeur obtenue en lançant un dé. Tracer sa fonction de répartition.

Remarque. À partir de la fonction de répartition F_X, on peut retrouver :

- $X(\Omega)$: c'est l'ensemble des points de discontinuité de F_X ;
- $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$: c'est la « hauteur du saut » à l'abscisse x.

Et réciproquement, à partir de $X(\Omega)$ et des probabilités $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$, on peut reconstruire la loi F_X de X. Ainsi on a la

Propriété 9 (Caractérisation de la loi d'une variable discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors la loi de X est entièrement caractérisée par la donnée :

- de l'ensemble image $X(\Omega)$ de X ;
- de tous les $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Méthode. Loi d'une variable aléatoire discrète.
Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X, on ne donne généralement pas la fonction de répartition, mais on explicitera plus simplement :

(i) l'ensemble image $X(\Omega)$ de la variable X ;

(ii) la valeur de $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exemple. Soit X la variable aléatoire donnant la valeur obtenue lors d'un lancer de dé. La loi de X est donnée par :

$$X(\Omega) = [\![1, 6]\!] \quad \text{et} \quad P(X = i) = \frac{1}{6} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq 6.$$

Propriété 10

Si X est une variable aléatoire discrète, alors $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier :

(1) $\forall x \in X(\Omega)$, $P([X = x]) \geq 0$;

(2) la famille $(P([X = x]))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Propriété 11 (Caractérisation d'une loi de probabilité)

Soient I un ensemble fini ou dénombrable, et $(p_k)_{k\in I}$ une famille de réels satisfaisant :

(1) $\forall k \in I, \quad p_k \geq 0$;

(2) la famille $(p_k)_{k\in I}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Alors la famille $(p_k)_{k\in I}$ définit une *loi de probabilité*, c'est-à-dire qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une variable aléatoire discrète X sur cet espace tels que :

$$X(\Omega) = I \quad \text{et} \quad P([X = k]) = p_k \ \text{ pour tout } \ k \in I.$$

Méthode. Loi de probabilité discrète.

Pour montrer que $(p_k)_{k\in I}$ définit une loi de probabilité, on vérifiera que :

- *si $I = [\![0, n]\!]$,*
  - *(i) $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $p_k \geq 0$,*
  - *(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.*
- *si $I = \mathbb{N}$,*
  - *(i) $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $p_k \geq 0$,*
  - *(ii) $\sum p_k$ converge (absolument) et sa somme est égale à 1.*

Exercice. Justifier l'existence d'une variable aléatoire Y satisfaisant $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

3 Moments d'une variable aléatoire discrète

Notation. Dans toute la suite, X désigne une variable discrète. Lorsque c'est nécessaire, on fixera une numérotation de son ensemble image $X(\Omega)$ qu'on notera :

- $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ si X est discrète fini,
- $X(\Omega) = \{x_k, \ k \in \mathbb{N}\}$ si X est discrète infinie.

3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire discrète X admet une *espérance* si la série $\sum x_k P([X = x_k])$ converge **absolument**[1]. Dans ce cas, on appelle *espérance de X*, notée $E(X)$, la somme de cette série :

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x P([X = x]).$$

[1] Rappelons que ceci signifie, par définition, que la famille $(xP(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Et dans ce cas, sa somme ne dépend alors pas de l'ordre de sommation.

Interprétation. Lorsqu'elle existe, l'espérance $E(X)$ est la moyenne des valeurs x prises par la variable aléatoire X pondérées par les probabilités $P([X = x])$.

Le saviez-vous ?

Après avoir entendu parler de la correspondance de Blaise Pascal (1623 - 1662) et Pierre de Fermat (1607 - 1665) au sujet du *problème des partis* lors d'un voyage à Paris en 1655, le mathématicien hollandais Christiaan Huygens (1629 - 1695) publie le premier livre sur le calcul des probabilités dans les jeux de hasard en 1657. Il y introduit comme notion fondamentale la « valeur de l'espérance » d'une situation d'incertitude. Pour nommer ce nouveau concept, il hésite entre les mots latins *spes* et *expectatio* signifiant respectivement *espoir* et *espérance*. Quelques années plus tard, il définit l'espérance de vie.

Christiaan Huygens (1629 - 1695).

Christiaan Huygens est également célèbre pour sa découverte de Titan, plus grand satellite de Saturne, et pour son invention de l'horloge à pendule qui améliora la précision des horloges existantes, la faisant passer de 15 minutes à 15 secondes par jour.

Propriété 12

Si X est une variable aléatoire réelle presque surement constante égale à $c \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire $P(X = c) = 1$), alors X admet une espérance et $E(X) = c$.

Exercice. Calculer l'espérance des variables $\mathbb{1}_A$, X et Y définies précédemment.

Remarque. Les variables aléatoires discrètes finies ont toujours une espérance. Par contre, il existe des variables aléatoires discrètes infinies qui n'ont pas d'espérance.

Propriété 13 (Linéarité de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes **admettant une espérance**, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance qui vaut :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Corollaire 14

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ admet aussi une espérance, et :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Propriété 15 (Existence d'une espérance par domination)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $|X| \leq Y$ presque sûrement.
Si Y admet une espérance alors X admet aussi une espérance et on a $|E(X)| \leq E(Y)$.

Propriété 16

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance.

- Si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$ (*positivité de l'espérance*).
- Si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$ (*croissance de l'espérance*).

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique, et soit $Y = \sqrt{X}$. Montrer que Y admet une espérance.

3.2 Théorème de transfert

Théorème 17 (*de transfert pour les variables discrètes*)

Soient X une variable aléatoire discrète et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète. De plus :

- Si X est une variable aléatoire discrète **finie** :

  La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance, et :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P([X = x]) \quad \text{(somme finie).}$$

- Si X est une variable aléatoire discrète **infinie** :

  La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si, et seulement si, la série $\sum g(x_k)P([X = x_k])$ converge **absolument**. Dans ce cas :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P([X = x]) \quad \text{(série absolument convergente).}$$

Méthode. Application du théorème de transfert.

Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $Y = g(X)$ à partir de la loi de X, et ceci sans connaitre la loi de Y.

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $Y = e^X$ et $Z = \dfrac{1}{1+X}$. Montrer que Y et Z admettent une espérance et calculer-la.

3.3 Moments d'ordre supérieur, variance

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète, et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X *admet un moment d'ordre* r si X^r possède une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si, et seulement si, la série $\sum x_k^r P([X = x_k])$ converge **absolument**. On note alors $m_r(X) = E(X^r)$ le *moment d'ordre* r de X :

$$m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P([X = x]).$$

Propriété 18

Si X admet un moment d'ordre r, alors il admet un moment à tout ordre $s \leq r$.

Preuve.

□

Remarque. En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance.

On dit que X admet une *variance* si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. D'après le théorème de transfert, c'est le cas si, et seulement si, la série $\sum (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$ converge **absolument**. On appelle alors *variance de* X, notée $V(X)$, la somme de cette série :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P([X = x]).$$

Interprétation. La variance d'une variable aléatoire discrète X mesure la dispersion des valeurs prises par X par rapport à $E(X)$. En particulier, c'est un réel positif ou nul.

Propriété 19 (de la variance)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Pour tout réel a et b, la variable aléatoire $aX + b$ admet aussi une variance, et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Mise en garde.

La variance n'est pas linéaire : $V(aX) = a^2 V(X)$!

Remarque. Puisque $(X - E(X))^2 \geq 0$, il suit par positivité de l'espérance (sous réserve d'existence) :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \geq 0.$$

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. On appelle *écart-type de* X, et on note $\sigma(X)$, le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Propriété 20

Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance. Alors :

$$X \text{ est constante presque surement} \quad \Leftrightarrow \quad V(X) = 0.$$

Théorème 21 (*Formule de Koenig* (1712 - 1757) - *Huygens* 1629 - 1695)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance.

X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre 2, et alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Preuve.

□

Méthode. Calcul de la variance.
Dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Koenig-Huygens pour calculer une variance et non la définition qui entraîne des calculs en général plus compliqués.

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète.

- X est dite *centrée* si X admet une espérance et si $E(X) = 0$.
- X est dite *centrée réduite* si X admet une variance et $E(X) = 0$, $V(X) = 1$.

Propriété 22

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors :

- $X - E(X)$ est centrée ;
- $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. On l'appelle *la variable aléatoire centrée réduite associée à X.*

4 Espérance totale

Rappel. Soit A un évènement de probabilité non nulle. Pour tout évènement $B \in \mathscr{A}$, on définit la *probabilité de B sachant A* par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Alors P_A est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Définition.

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$, et X une variable aléatoire réelle discrète.

On appelle *loi de X sachant A* la loi de X pour la probabilité P_A, c'est-à-dire la donnée de tous les couples $(x, P_A(X = x))$ pour x dans $X(A)$.

Exercice. Le nombre de clients qui entrent dans un restaurant un soir de semaine est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque client choisit, indépendamment du choix de ses voisins, de la viande avec probabilité p et du poisson avec la probabilité $1 - p$. On note Y le nombre de clients qui choisissent de la viande.

a) Quelle est la loi de Y sachant $[X = n]$?

Définition.

On dit que X *admet une espérance sachant* A (ou *conditionnellement à* A) si X admet une espérance pour la probabilité P_A, c'est-à-dire si la série $\sum x_k P_A(X = x_k)$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle *espérance de* X *sachant* A, notée $E(X|A)$ la somme de cette série :

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(A)} x P_A(X = x).$$

Remarques.

- Très souvent, la loi de X sachant A est usuelle et l'espérance conditionnelle en découle immédiatement.
- On peut choisir indifféremment de sommer sur $X(\Omega)$ ou $X(A)$ pour calculer $E(X|A)$, les probabilités $P_A(X = x)$ pour $x \notin X(A)$ étant nulles.

Exercice. Reprenons l'exemple des clients du restaurant.

b) Déterminer l'espérance de Y sachant $[X = n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 23 (*Formule de l'espérance totale*)

Soit $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'événements tel que $P(A_n) \neq 0$ pour tout $n \in I$.

Une variable discrète X admet une espérance si, et seulement si :

(i) pour tout $n \in I$, $E(X|A_n)$ existe ;

(ii) $\sum P(A_n) E(|X||A_n)$ converge (absolument).

Dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n \in I} P(A_n) E(X|A_n) = \sum_{n \in I} \sum_{x \in X(\Omega)} x P_{A_n}(X = x) P(A_n).$$

Preuve. On fait la preuve dans le cas où X est finie et $I = [\![1, N]\!]$.

□

Remarques.

- En pratique, la variable X est toujours positive, et donc on remplacera $E(|X||A_i)$ par $E(X|A_i)$.
- Si X est finie, elle admet une espérance et la formule de l'espérance totale s'applique alors sans se soucier des problèmes de convergence.

Exercice. Reprenons l'exemple des clients du restaurant.

c) En déduire que Y admet une espérance que l'on calculera.

Remarques.

- Lorsqu'on utilise la formule de l'espérance totale, on précisera **toujours** au préalable le système complet d'événements qu'on utilise.
- La formule de l'espérance totale est encore valable pour un système presque complet d'évènements.

5 Lois discrètes usuelles

5.1 Expériences associées aux différentes lois classiques.

- **Lois issues d'un tirage unique :**
  - **Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$:** succès (valeur 1) ou échec (valeur 0) lors d'un tirage déséquilibré.
  - **Loi uniforme $\mathscr{U}([\![1, N]\!])$:** valeur obtenue lors d'un tirage équiprobable dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.
- **Lois issues d'une répétition de tirages avec remise :**
  - **Loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$:** nombre de succès lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
  - **Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$:** temps d'attente du premier succès lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

La loi de Poisson ne correspond pas à une situation typique mais à une loi limite (de la loi binomiale). Elle se rencontre lorsqu'on répète un grand nombre de fois et de manière indépendante une expérience aléatoire dont la réalisation est rare. Lorsqu'il faut l'utiliser, l'énoncé l'indique explicitement.

Le saviez-vous ?

Nicolas de Condorcet (1743 - 1794) était un mathématicien mais aussi un économiste et un homme politique. Auteur de nombreux écrits sur le calcul de probabilités, il montre comment les mathématiques peuvent aider à la gestion d'une démocratie. Il cherche par exemple à déterminer la composition optimale d'un jury d'assises permettant de minimiser la probabilité d'une erreur de jugement. Il se penche également sur les systèmes de vote, et montre l'impossibilité de choisir un candidat qui soit meilleur face à tout autre.

Le mathématicien et physicien français Denis Poisson (1781 - 1840) maîtrise toutes les notions d'analyse connues à son époque et les applique dans des domaines très variés comme la géométrie, la mécanique ou l'électrostatique. En 1837, il change de centre d'intérêt et publie un ouvrage intitulé *Recherche sur la probabilité des jugements*. On y trouve la loi qui porte désormais son nom, et qu'il obtient comme limite de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec np constant. Curieusement, il s'appuie aussi sur des considérations sur des jugements pour produire des résultats de portée bien plus large.

Denis Poisson (1781 - 1840).

5.2 Simulation en `Python`

Le sous-module `numpy.random` est dédié aux simulations de variables aléatoires.

Définition.

On importe la bibliothèque `numpy.random` en écrivant l'une ou l'autre des instructions suivantes (on privilégiera la deuxième) :

`from numpy.random import *` ou `import numpy.random as rd`

Définition.

- La commande `rd.randint(n)` simule la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- La commande `rd.randint(a,b)` simule la loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$ avec $a < b$.
- La commande `rd.binomial(n,p)` simule la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
- La commande `rd.geometric(p)` simule la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.
- La commande `rd.poisson(lambda)` simule la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Remarques.

- On peut simuler la loi de Bernoulli de paramètre p en écrivant l'instruction `rd.binomial(1,p)`.
- On peut obtenir r simulations d'une loi usuelle sous la forme d'un vecteur ou $r \times s$ simulations sous la forme d'une matrice de $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ en ajoutant à ces commandes l'argument `r` ou `[r,s]` respectivement. Par exemple :
  - `rd.geometric(p,r)` renvoie un vecteur contenant r simulations de la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$;
  - `rd.poisson(lambda,[r,s])` renvoie $r \times s$ simulations de la loi de Poisson de paramètre λ.

5.3 Table des lois discrètes usuelles

Lois discrètes usuelles

	Nom	Notation	Support $X(\Omega)$	Valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$	Espérance	Variance
Lois finies	Loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathscr{U}(\{1,\dots,n\})$	$\{1,\dots,n\}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
	Loi uniforme sur $\{a,a+1,\dots,b\}$ $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$	$\mathscr{U}(\{a,\dots,b\})$	$\{a,\dots,b\}$	$\dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$
	Loi de Bernoulli de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
	Loi binômiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$	$\mathscr{B}(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Lois infinies	Loi géométrique de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
	Loi de Poisson de paramètre λ $\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ