Chapitre 3

Principes généraux de calculs des probabilités

Compétences attendues.

- ✓ Savoir modéliser une expérience probabiliste en la traduisant en langage mathématique.
- ✓ Maitriser les principes de calculs des probabilités.
- ✓ Utiliser un système complet d'évènements pour des expériences en deux étapes, en vue d'appliquer la formule des probabilités totales ou la formule de Bayes.

Mathieu Mansuy

Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-besancon.fr`

1 Espaces probabilisés

1.1 Espaces probabilisables

Définition.

On appelle *espace probabilisable* la donnée d'un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ où :

- Ω est un ensemble qu'on appelle *univers*, et dont les éléments sont appelés les *issues* ;
- $\mathscr{A}$ est une sous-partie de $\mathscr{P}(\Omega)$, dont les éléments sont appelés les *évènements*, et qui satisfait les points suivants (un tel ensemble est aussi appelé *tribu* ou σ*-algèbre*) :
  - $\Omega \in \mathscr{A}$;
  - $\forall A \in \mathscr{A},\ \bar{A} \in \mathscr{A}$;
  - si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Remarque. Dans la pratique, on connait rarement l'ensemble $\mathscr{A}$ des évènements avec lequel on travaille. Le seul cas où on a vraiment accès à $\mathscr{A}$ est celui où Ω est un ensemble fini (c'est-à-dire lorsqu'on considère une expérience n'ayant qu'un nombre fini d'issues possibles). Dans ce cas, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω.

Exemple. On considère l'expérience consistant à lancer simultanément deux dés. Dans ce cas :

- l'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Autrement dit, une issue $\omega \in \Omega$ est un couple de la forme (i, j), où i représente le résultat du premier dé et j celui du second.
- l'ensemble $\mathscr{A}$ des évènements est $\mathscr{P}(\Omega)$.

Par exemple, l'évènement « le premier dé vaut 6 » est la partie

$$\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \subset \Omega.$$

L'évènement « la somme des deux dés est paire » est

$$\{(1,1),(1,3),\dots,(2,2),\dots,(6,4),(6,6)\} \subset \Omega.$$

1.2 Espaces probabilisés

Définition.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une application $P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_+$ est appelée *probabilité* si :

- $P(\Omega) = 1$;
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements deux à deux disjoints (on dira plutôt *incompatibles*), alors :
$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un *espace probabilisé*.

Dans toute la suite de ce chapitre, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désignera un espace probabilisé.

2 Probabilité d'un évènement décrit par une expérience concrète

2.1 Rédaction

La rédaction d'un calcul de probabilité comporte généralement quatre étapes[1] :

Étape 1. Si cela n'a pas été fait dans l'énoncé, **introduire les *évènements primaires*** issus de l'expérience (évènements dont la réalisation est « simple à énoncer », et qui permettront de décrire tous les autres évènements). On choisira pour cela des notations judicieuses (numérotation des évènements s'ils sont liés à la répétition d'une même expérience, ...).

Étape 2. **Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement** A dont on recherche la probabilité : « l'évènement A est réalisé si, et seulement si, ... ». Il s'agit d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de réalisation de l'évènement A faisant intervenir les évènements primaires.

Étape 3. Donner une **traduction ensembliste** de cette phrase : il s'agit d'exprimer A à l'aide d'unions, d'intersections ou de complémentaires des évènements primaires.

Étape 4. On peut alors calculer la probabilité $P(A)$ en s'appuyant sur la décomposition ensembliste de A à partir des règles de calcul des probabilités qui sont rappelées dans les sections suivantes.

Exercice. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs et avec remise d'une boule. Donner une traduction ensembliste des évènements suivants :

A : « la longueur de la première suite de boules de même couleur est au moins 3 » ;

B : « la longueur de la première suite de boules de même couleur est égale à 3 ».

Le saviez-vous ?

Le *Problème des partis* est une question qui joue un rôle fondamental dans l'histoire de la mathématisation du hasard. Discuté depuis le 14ème siècle, ce problème concernait le partage équitable des gains d'un jeu de hasard interrompu : deux joueurs décident d'arrêter de jouer avant la fin du jeu et souhaitent partager les gains de manière équitable en s'appuyant sur les chances que chacun avait de gagner une fois à ce point.

Blaise Pascal (1623 - 1662) résout ce problème dans son *Traité du triangle arithmétique* de 1654. Il étudie pour cela les propriétés des coefficients binomiaux, et en donne une présentation commode en tableau (maintenant connu sous le nom de *triangle de Pascal*). C'est aussi dans cet ouvrage qu'apparait pour la première fois le principe du raisonnement par récurrence.

Le talent de Pascal, nourri de son expérience de géomètre et de juriste, a été de voir se dessiner la possibilité d'une mathématique du hasard, proprement un oxymore à son époque, et d'avoir approché ainsi la question des décisions équitables et justes, fondamentalement d'ordre juridique. Ces travaux donneront naissance au cours du 18ème siècle au calcul des probabilités, et influenceront fortement les théories économiques modernes et les sciences sociales.

Blaise Pascal (1623 - 1662).

[1] Les situations étant très variées dans la pratique, on pourra être amené à s'écarter légèrement de la voie tracée ci-dessous.

2.2 Cas équiprobable

On suppose dans cette section que l'univers Ω est un **ensemble fini**, de sorte que $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$

Définition.

On dit que P est *l'équiprobabilité* (ou *probabilité uniforme*) si pour tout $\omega \in \Omega$:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

On parle alors de *cas équiprobable*.

Propriété 1

On suppose qu'on est dans le **cas équiprobable**. Alors, pour tout évènement A :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables (c'est-à-dire où } A \text{ est réalisé)}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Rédaction.

Dans le cas où le cardinal de A est facile à calculer, $P(A)$ s'obtient immédiatement et la rédaction se réduira alors souvent à l'étape 1 dans le modèle de rédaction précédent, en indiquant qu'**on est dans le cas équiprobable** avant tout calcul de probabilités.

Exercice. On choisit au hasard une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Quelle est la probabilité qu'elle soit de rang 1 ?

2.3 Premières règles de calcul

Propriété 2

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$.
- *Événements contraires :* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- *Différence d'évènements :*[a] $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- *Croissance :* Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.

[a] Rappelons que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Vocabulaire. Un évènement $A \in \mathscr{A}$ est dit :

- *presque sûr* (ou *quasi certain*) si $P(A) = 1$;
- *négligeable* (ou *quasi impossible*) si $P(A) = 0$.

2.4 Probabilités conditionnelles

Définition.

Soit $B \in \mathscr{A}$ un évènement tel que $P(B) > 0$. Pour tout évènement A, on appelle *probabilité de A sachant B* le réel noté $P_B(A)$ (ou parfois $P(A|B)$) défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Mise en garde.

On ne parle pas d'évènement conditionnel, cela n'a pas de sens. Ce qu'on aurait envie d'appeler « A sachant B » est en fait $A \cap B$ (A et B sont tous deux réalisés).

Propriété 3

P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Remarque. Comme conséquence de ce résultat, toutes les règles de calcul de probabilités s'appliquent aussi pour P_B. Ainsi $P_B(A_1 \setminus A_2) = P_B(A_1) - P_B(A_1 \cap A_2)$ par exemple.

2.5 Probabilité d'une intersection

Définition.

- Deux évènements A et B sont dits *indépendants* lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Soit I un ensemble fini ou dénombrable, et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements.
  On dit que les évènements A_i sont *deux à deux indépendants* si :
  $$\forall i \neq j, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$
- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements. Les évènements A_i sont *mutuellement indépendants* si :
  - Famille finie $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$: $\quad \forall k \in [\![2,n]\!],\ \forall (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n,$
  $$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k}).$$
  - Famille infinie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$: $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k,\ 0 \leq i_1 < \cdots < i_k,$
  $$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k})$$

Remarques.

- Supposons $P(A) \neq 0$. A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(B) = P_A(B)$.
- La plupart du temps, l'indépendance se déduit de la situation. Deux évènements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne donne pas d'information sur la réalisation de l'autre.

Mise en garde.

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants, alors les A_i sont deux à deux indépendants. Mais **la réciproque est fausse** en générale !

Propriété 4

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'évènements. Pour tout $i \in I$, on pose :

$$B_i = A_i \quad \text{ou bien} \quad B_i = \bar{A}_i.$$

Alors :

$$(A_i) \text{ mut. indép. (resp. 2 à 2 indép.)} \quad \Rightarrow \quad (B_i) \text{ mut. indép. (resp. 2 à 2 indép.)}$$

Propriété 5 (Probabilité d'une intersection finie)

Cas de deux évènements.

- Si A et B sont **indépendants**, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Dans le cas général, on a $P(A \cap B) \underset{P(A) \neq 0}{=} P(A) \times P_A(B) \underset{P(B) \neq 0}{=} P(B) \times P_B(A)$
- Si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$ alors $P(A \cap B) = 0$.

Cas d'un nombre fini d'évènements.

- Si les $(A_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ sont **mutuellement indépendants**, on a $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.
- Dans le cas général, on dispose de la *formule des probabilités composées* :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \underset{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0}{=} P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Méthode. Utilisation de la formule des probabilités composées.

La formule des probabilités composées s'applique lorsqu'il y a un enchainement temporel des évènements (A_1 étant le premier à advenir, puis A_2, … , puis A_n en dernier), chaque résultat influant sur les suivants.

Exercice. Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire 3 boules successivement. Quelle est la probabilité de l'évènement A : « tirer une boule noire pour la première fois au troisième tirage » dans les cas suivants :

- Tirages successifs avec remise.

- Tirages successifs sans remise.

Propriété 6 (Probabilité d'une intersection dénombrable)

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite décroissante d'évènements**, i.e. telle que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \qquad (\textit{propriété de la limite monotone}).$$

- Dans le cas général : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)$.

Exercice. On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité d'apparition de pile est $p \in]0,1[$. Pour tout $j \geq 1$, calculer la probabilité de l'évènement E_j : « on obtient toujours face à partir du rang j ».

2.6 Probabilité d'une union

Définition.

- Deux évènements A et B sont dits *incompatibles* lorsqu'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément, soit encore si $A \cap B = \varnothing$.
- Soit I un ensemble fini ou dénombrable, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements.

  On dit que les évènements A_i sont *deux à deux incompatibles* si pour tous $i \neq j$, A_i et A_j sont incompatibles.

Propriété 7 (Probabilité d'une union finie)

Cas de deux évènements.

- Si A et B sont **incompatibles** alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Dans le cas général, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Cas d'un nombre fini d'évènements $(A_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$**.**

- Si les A_i sont **deux à deux incompatibles**, alors : $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
- Dans le cas général, on dispose de la *formule de Poincaré* ou *du crible* :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k})\right).$$

Remarque. Formule du crible pour $n = 3$ et $n = 4$:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) =$

Propriété 8 (Probabilité d'une union dénombrable)

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements. Si les A_n sont **deux à deux incompatibles**, alors la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge et :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad (\textit{propriété de } \sigma\textit{-additivité}).$$

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite croissante d'évènements**, i.e. telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \quad (\textit{propriété de la limite monotone}).$$

- Dans le cas général : $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$.

Remarque. Comme une probabilité conditionnelle est une probabilité, tous les résultats et toutes les règles vues ci-dessus pour le calcul des probabilités s'appliquent au calcul des probabilités conditionnelles.

3 Cas d'une expérience dont l'issue dépend du résultat d'une expérience antérieure

3.1 Systèmes complets d'évènements

Définition.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie ou dénombrable d'évènements. On dit que :

- $(A_i)_{i\in I}$ est un *système complet d'évènements* si les évènements A_i sont **deux à deux incompatibles** et $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.
- $(A_i)_{i\in I}$ est un *système presque complet d'évènements* si les évènements A_i sont **deux à deux incompatibles** et $P\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = 1$.

Remarque. On peut schématiser ces définitions de la manière suivante :

Exemple. Pour tout évènement $A \in \mathscr{A}$, $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements.

Exercice. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. Pour tout $i \geq 1$, on note A_i l'évènement : « faire i lancers avant de faire face pour la première fois ».

1. La famille $(A_i)_{i\geq 1}$ est-elle un système complet d'évènements ?
2. Montrer que la famille $(A_i)_{i\geq 1}$ est un système presque complet d'évènements.

Pour aller plus loin.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système presque complet d'évènements tel que $\bigcup_{i\in I} A_i \neq \Omega$, alors $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ est un évènement impossible presque sûrement, et $(A_i)_{i\in I} \cup \left(\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}\right)$ est un système complet d'évènements.

Propriété 9

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements, alors $\sum_{i\in I} P(A_i) = 1$.

Preuve.

$\square$

3.2 Formule des probabilités totales

Théorème 10 (*Formules des probabilités totales*)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements. Pour tout évènement B :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) \underset{\forall i\in I,\ P(A_i)\neq 0}{=} \sum_{i\in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B).$$

Preuve.

$\square$

Remarques.

- Il y a donc deux formules des probabilités totales, l'une avec $P(B\cap A_i)$ et l'autre avec $P_{A_i}(B)$. Les deux sont à retenir, on choisira l'une ou l'autre suivant que l'on connaisse $P(B\cap A_i)$ ou $P_{A_i}(B)$
- Les formules des probabilités totales restent valables si $(A_i)_{i\in I}$ est un système presque complet d'évènements.

Cas particulier. En appliquant le résultat précédent avec le système complet d'évènements $(A, \overline{A})$, on obtient :

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}),$$

valable pour tout évènement A avec $0 < P(A) < 1$.

Méthode. Quand applique-t-on la formule des probabilités totales ?

On l'applique lorsqu'une expérience aléatoire se déroule en deux étapes :

- *à la première étape, un et un seul des A_i est réalisé ;*
- *à la seconde étape, B est réalisé ou non.*

Cette formule permet alors de calculer la probabilité de B.

Exercice. Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$, il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n,
- s'il est en panne à la date $n-1$, il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n,

où (a, b) est un couple de réels de $]0,1[$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'évènement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de (p_n) ?

3.3 Formule de Bayes

Théorème 11 (*Formule de Bayes* (1702 - 1761))

- Si A et B sont deux évènements de probabilités non nulles, alors :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

- Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements fini ou dénombrable, alors pour tout évènement B de probabilité non nulle et pour tout $j \in I$:

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{P(B)} \underset{\forall i\in I,\ P(A_i)\neq 0}{=} \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i\in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B)}.$$

Preuve.

□

Remarque. La formule de Bayes reste valable pour un système presque complet d'évènements.

Méthode. Quand applique-t-on la formule de Bayes ?
Elle s'utilise pour des expériences aléatoires se déroulant en deux étapes. Elle permet de calculer $P_B(A_j)$, c'est-à-dire la probabilité de A_j (étape 1) sachant B (étape 2). On l'appelle parfois la formule de probabilité des causes puisqu'elle donne la probabilité d'une cause (étape 1) sachant la conséquence (étape 2).

Exercice. On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de sorte que le côté pile a une probabilité d'apparition de $\frac{2}{3}$, et de deux urnes : l'urne A contient deux boules rouges et trois boules vertes et l'urne B contient trois boules rouges et deux boules bleues. On lance la pièce. On pioche alors successivement et avec remise deux boules dans l'urne A si le côté pile apparaît ou bien dans l'urne B si le côté face apparaît.

1. Soit E_k l'évènement « on obtient exactement k boules rouges » pour chaque $k \in \{0, 1, 2\}$. Calculer $P(E_k)$.

2. Calculer la probabilité que les tirages aient été effectués dans l'urne A sachant qu'on a obtenu :

   (a) deux boules rouges ; (b) au moins une boule rouge.