Chapitre 18

Endomorphismes symétriques

1 Endomorphismes symétriques et matrices symétriques **2**
1.1 Définition 2
1.2 Propriétés 2

2 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques **4**
2.1 Réduction des endomorphismes symétriques . 4
2.2 Réduction des matrices symétriques réelles . . 5

3 Forme quadratique associée à une matrice symétrique **7**
3.1 Définition 7
3.2 Signe d'une forme quadratique 8

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'un endomorphisme est symétrique.
- ✓ Diagonaliser une matrice symétrique ou un endomorphisme symétrique en base orthonormée.
- ✓ Étudier le signe d'une forme quadratique associée à une matrice symétrique.

Mathieu Mansuy
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-besancon.fr`

1 Endomorphismes symétriques et matrices symétriques

Dans tout le chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.

1.1 Définition

Définition.

Un endomorphisme f de E est dit *symétrique* si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Exemple. Un projecteur orthogonal est symétrique.

Exercice. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrer que l'application transposée $f : M \in E \mapsto {}^tM$ est un endomorphisme symétrique de $(E, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$.

1.2 Propriétés

Rappel. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si ${}^tM = M$, c'est-à-dire si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j} = m_{j,i}.$$

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique.

Propriété 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathscr{B}$ une **base orthonormée** de E. Alors :

$$f \text{ est un endomorphisme symétrique} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B}}(f) \text{ est symétrique.}$$

Preuve.

$\square$

Propriété 2

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p est un endomorphisme symétrique.
Dans ce cas, p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p)$, et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$.

Preuve.

$\square$

Exercice. Identifier l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Rappel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un sous-espace F de E est *stable par* f si :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Propriété 3

Soit f un endomorphisme symétrique, et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors $F^{\perp}$ est également stable par f.

Preuve.

□

2 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques

2.1 Réduction des endomorphismes symétriques

Propriété 4

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Plus précisément : si $e_1, \ldots, e_p$ sont des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthogonale.

Preuve.

□

Théorème 5 (Théorème spectral pour les endomorphismes symétriques)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors f est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.

Preuve. On admet que f est diagonalisable à valeurs propres réelles. Pour une preuve de ce résultat,

☞ **Complément de cours 5. Réduction des endomorphismes symétriques.**

Montrons malgré tout les autres assertions de ce théorème.

□

2.2 Réduction des matrices symétriques réelles

Théorème 6 (Théorème spectral pour les matrices symétriques réelles)

Soit A une matrice symétrique **réelle**. Alors A est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que :

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

Preuve.

□

Mise en garde.

Même si les nombres complexes ne sont plus au programme en ECG, précisons que ce résultat est faux pour des matrices symétriques à coefficients **complexes**.

Il faudra donc bien spécifier à chaque utilisation de ce théorème que la matrice considérée est symétrique **réelle**.

Méthode. Diagonalisation en base orthonormée d'une matrice symétrique réelle.

Pour diagonaliser une matrice symétrique réelle A en base orthonormée, c'est-à-dire pour obtenir P une matrice orthogonale et D une matrice diagonale réelle telles que $D = {}^tPAP$, on procèdera comme suit :

(i) on sait qu'elle est diagonalisable car symétrique réelle ;

(ii) on détermine les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (toutes réelles) de A (en utilisant un polynôme annulateur, la trace, ou le pivot de Gauss) ;

(iii) on détermine une base orthonormée $\mathscr{B}_i$ de chacun des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$ (éventuellement à l'aide du procédé de Gram Schmidt) ;

(iv) la base $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_i$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

(v) la matrice P de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$ est orthogonale. Donc $P^{-1} = {}^tP$ et :

$$ {}^tPAP = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{\dim(E_{\lambda_1})\ fois}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{\dim(E_{\lambda_p})\ fois}). $$

Exercice. Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Forme quadratique associée à une matrice symétrique

3.1 Définition

Définition.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. On appelle *forme quadratique associée à* A l'application q_A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Ce qui se récrit, en notant X est la matrice de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $\quad q_A(x) = {}^tXAX$.

Exemples. Déterminons q_A dans les cas suivants :

- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarques.

- Une forme quadratique est une combinaison linéaire de termes de la forme x_i^2 ou $x_i x_j$: on parle de *polynôme homogène de degré 2*. En particulier, $q_A(x)$ ne contient pas de terme en x_i, en $x_i x_j x_k$ ou encore de terme constant.
- Une forme quadratique étant une fonction polynomiale, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Mise en garde.

Attention, une forme quadratique n'est pas une application linéaire ! Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par exemple :

$$q_A(\lambda \cdot x) = {}^t(\lambda X)A(\lambda X) = \lambda\, {}^tXA(\lambda X) = \lambda^2\, {}^tXAX = \lambda^2 q_A(x).$$

Remarque. Réciproquement, une fonction polynomiale q homogène de degré 2 est une forme quadratique. En effet, s'il existe des réels $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ tels que :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} x_i x_j,$$

alors q est égale à la forme quadratique q_A associée à la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Mise en garde.

Ne pas oublier pour les coefficients non diagonaux que le terme en $x_i x_j$ est deux fois le coefficient $a_{i,j}$.

Exercice. Déterminer la matrice symétrique $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ associée à la forme quadratique :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3.$$

3.2 Signe d'une forme quadratique

Propriété 7

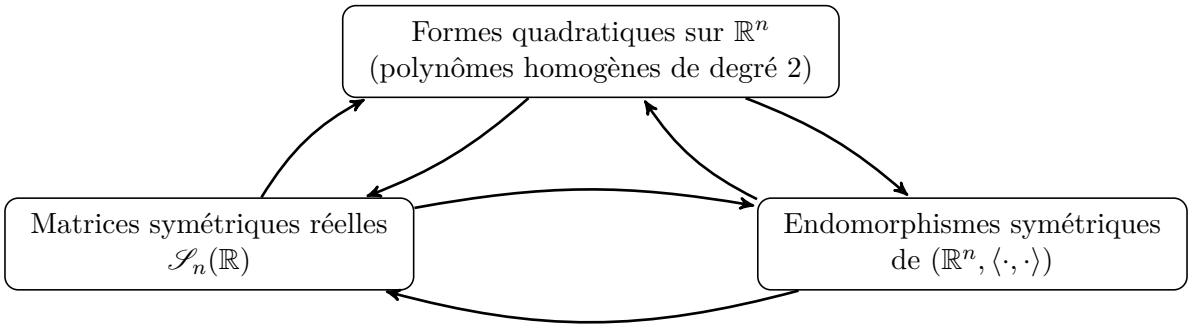
Considérons $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Soit A une matrice symétrique réelle, et f l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) = \langle x, f(x) \rangle.$$

Preuve.

□

Remarque. On a ainsi établi une correspondance bijective entre les objets mathématiques suivants :



Propriété 8

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à un endomorphisme symétrique f.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base **orthonormée** de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes).
Si $x \in \mathbb{R}^n$ est de coordonnées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, alors :

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2.$$

Preuve.

□

Corollaire 9

Soit A une matrice symétrique réelle, et q_A la forme quadratique associée. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$m\|x\|^2 \leq q_A(x) \leq M\|x\|^2$$

où m (resp. M) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A.

Preuve.

□

Théorème 10 (Signe d'une forme quadratique)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et q_A la forme quadratique associée.

- Si **toutes** les valeurs propres de A sont positives (resp. négatives), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) \geq 0 \quad (\text{resp. } q_A(x) \leq 0).$$

  On dit alors que q_A est une forme quadratique *positive* (resp. *négative*).

- Si **toutes** les valeurs propres de A sont strictement positives (resp. strictement négatives), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, \quad q_A(x) > 0 \quad (\text{resp. } q_A(x) < 0).$$

  On dit alors que q_A est une forme quadratique *strictement positive* (resp. *strictement négative*).

- Si A possède des valeurs propres non nulles de signes contraires, alors q_A n'est pas de signe constant.

Preuve.

□

Pour aller plus loin.

La réciproque de ce résultat est vraie (comme nous le verrons en TD) : la connaissance du signe de q_A permet inversement de retrouver le signe des valeurs propres de A. Ainsi :

$$q_A \text{ est positive (resp. négative)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \text{ (resp. } \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-).$$

$$q_A \text{ est strictement positive (resp. strictement négative)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \text{ (resp. } \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^*).$$

Méthode. Signe d'une forme quadratique.

Pour étudier le signe d'une forme quadratique q associée à une matrice symétrique A, on peut selon les cas :

- *soit écrire $q(x)$ comme combinaison linéaire de carrés ;*
- *soit déterminer les valeurs propres de A et conclure grâce au théorème précédent.*

Exercice. Déterminer le signe de la forme quadratique q à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. Déterminer le signe de la forme quadratique

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$