

Projection orthogonale.

1 Supplémentaire orthogonal	2
1.1 Définition	2
1.2 Supplémentaire orthogonal	4
2 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	5
2.1 Projeté orthogonal	5
2.2 Expression dans une base orthonormée de F .	6
2.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace	9
2.4 Pseudo-solutions d'un système linéaire	11

Compétences attendues.

- ✓ Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace.
- ✓ Déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel.
- ✓ Utiliser une projection orthogonale pour minimiser une quantité.

1 Supplémentaire orthogonal

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1.1 Définition

Définition.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle *orthogonal de F* , et on note F^\perp , l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F , c'est-à-dire :

$$F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Ainsi : $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0$.

Propriété 1

F^\perp est un sous-espace vectoriel de E orthogonal à F .

Preuve.

Exemple. $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$. □

Propriété 2

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

(1) Si G est orthogonal à F , alors $G \subset F^\perp$. (2) $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Preuve.

□

Propriété 3

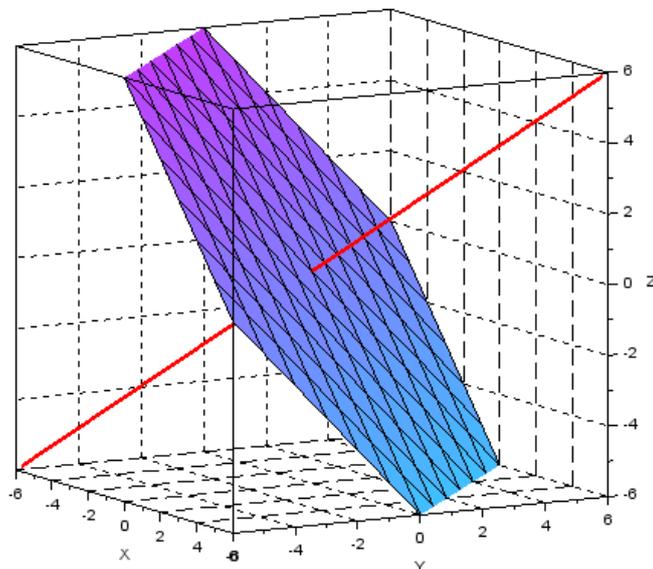
Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ un sous-espace vectoriel de E . Alors :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \langle x, e_i \rangle = 0.$$

Preuve.

□

Exercice. Soit $F = \{(x, y, z), x + y + z = 0\}$ sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique. Déterminer F^\perp .



Représentations de F et F^\perp .

1.2 Supplémentaire orthogonal

Théorème 4

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$, et :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

On dit que F^\perp est le *supplémentaire orthogonal* de F .



Preuve.

□

Corollaire 5

(1) $(F^\perp)^\perp = F$.

(2) La concaténation d'une base orthonormée (e_1, \dots, e_p) de F et d'une base orthonormée (e_{p+1}, \dots, e_n) de F^\perp est une base orthonormée de E .

Preuve.

□



Pour aller plus loin.

On peut définir de même l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F en dimension infinie. Cependant, les propriétés énoncées dans ce paragraphe ne sont alors plus vraies : on n'a pas $E = F \oplus F^\perp$ en général, ou encore $F = (F^\perp)^\perp$ lorsque E est de dimension infinie.

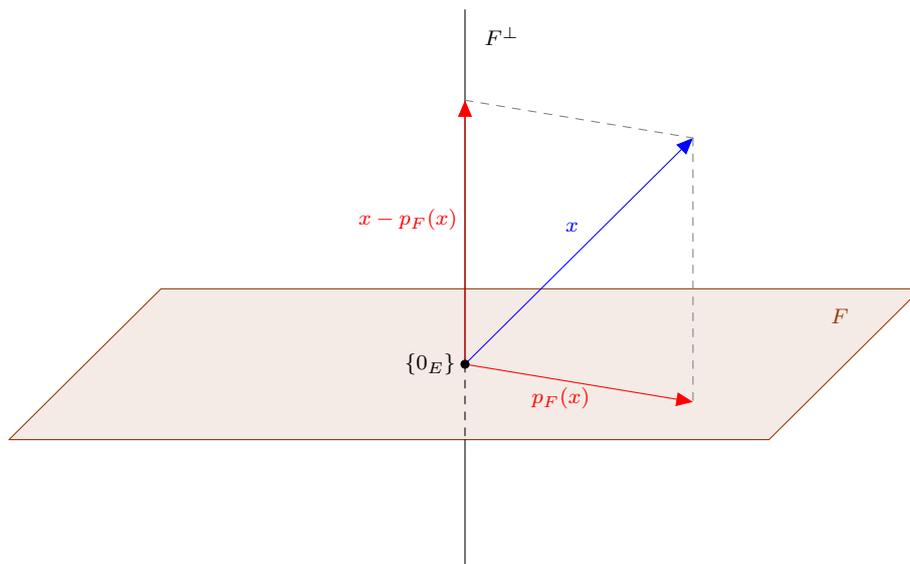
2 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

2.1 Projeté orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On vient de voir que $E = F \oplus F^\perp$.

Définition.

On appelle *projection orthogonale sur F* , notée p_F , la projection sur F dans la direction de F^\perp . Pour tout $x \in E$, $p_F(x)$ est appelé le *projeté orthogonal de x sur F* .



Projeté orthogonal de x sur F .

Remarques.

- Soit p un projecteur de E . p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$.
- Le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur $x \in E$ sur F est caractérisé par $\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$.

Méthode. Calcul du projeté orthogonal à partir d'une base de F .

Pour déterminer le projeté orthogonal de $x \in E$ sur F , on peut procéder ainsi :

(i) on détermine une base (u_1, \dots, u_p) de F ;

(ii) puisque $p_F(x) \in F$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$;

(iii) puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$, il satisfait $\begin{cases} \langle x - p_F(x), u_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x - p_F(x), u_p \rangle = 0 \end{cases}$;

(iv) on résout alors ce système linéaire pour obtenir $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, et donc $p_F(x)$.

Exercice. Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, déterminer le projeté orthogonal de $x = (2, 2, 2)$ sur le sous-espace vectoriel $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - \frac{y}{2} + z = 0 \right\}$.

2.2 Expression dans une base orthonormée de F

Propriété 6

Soit (e_1, \dots, e_p) une **base orthonormée** de F . Alors :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle e_k.$$



Preuve.

□

Méthode. Calcul du projeté orthogonal lorsqu'on dispose d'une **B.O.N.** de F .

Lorsqu'on dispose d'une **base orthonormée** (e_1, \dots, e_p) de F (et uniquement dans ce cas), on utilisera la formule précédente pour obtenir le projeté orthogonal de x sur F :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

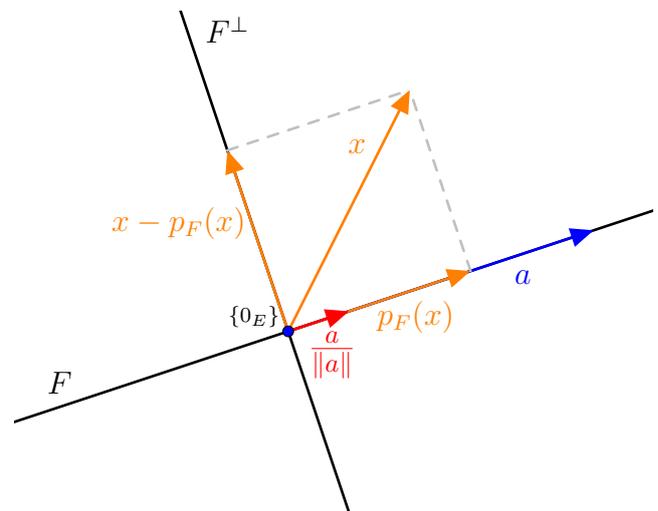
Remarque. Si on ne dispose pas d'une base orthonormée de F , on pourrait procéder ainsi :

- (i) on détermine une base (x_1, \dots, x_p) de F ;
- (ii) on l'orthonormalise par Gram-Schmidt : on obtient une base orthonormée (e_1, \dots, e_p) de F ;
- (iii) on utilise la formule précédente : $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$.

Cependant, cette méthode est en général plus longue que la méthode décrite à la section 2.1. On utilisera donc la propriété précédente **uniquement** si on dispose déjà d'une base orthonormée de F .

Exercice. Obtenir le projeté orthogonal de $x = (2, 2, 2)$ sur le sous-espace $F = \text{Vect}((1, 1, -1), (0, 1, 1))$.

Exercice. Soit F une droite vectorielle dirigée par $a \neq 0_E$. Exprimer le projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur F , puis celui de x sur F^\perp .



Remarque. Retour sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

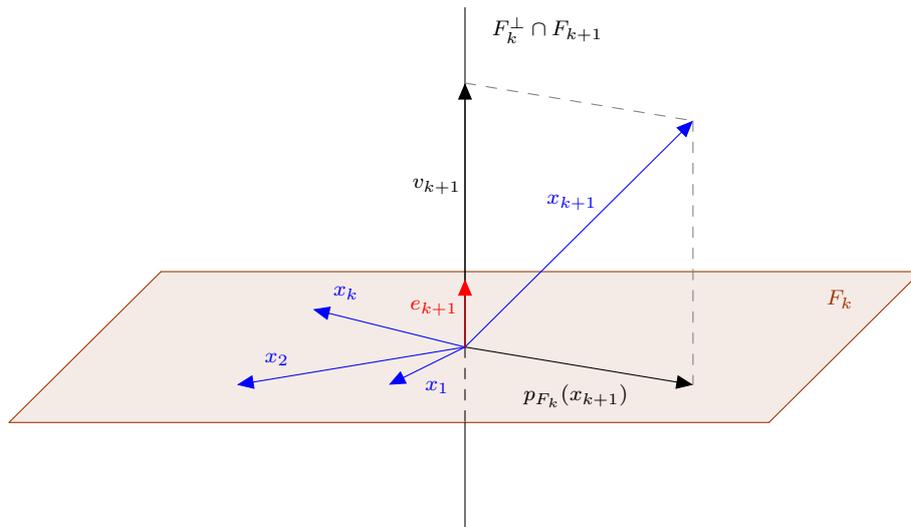
Soit (x_1, \dots, x_n) une famille libre de vecteurs de E , et notons $F_k = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. On peut récrire le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de la manière suivante :

- **Étape 1.** Poser $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$;
- **Étape $k + 1$.** Une fois les vecteurs e_1, \dots, e_k construits,

(a) poser $v_{k+1} = x_{k+1} - p_{F_k}(x_{k+1})$;

(b) poser $e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$.

Pour « redresser » x_{k+1} en un vecteur v_{k+1} orthogonal à F_k , on lui soustrait donc sa projection orthogonale sur F_k . Reste ensuite à le normaliser pour obtenir e_{k+1} .



Algorithme de Gram-Schmidt.

2.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace

Théorème 7 (de la distance à un sous-espace)

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$.
 L'ensemble $\{\|x - y\|, y \in F\}$ admet un minimum, et ce minimum est atteint en un unique vecteur de F , qui est $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F .



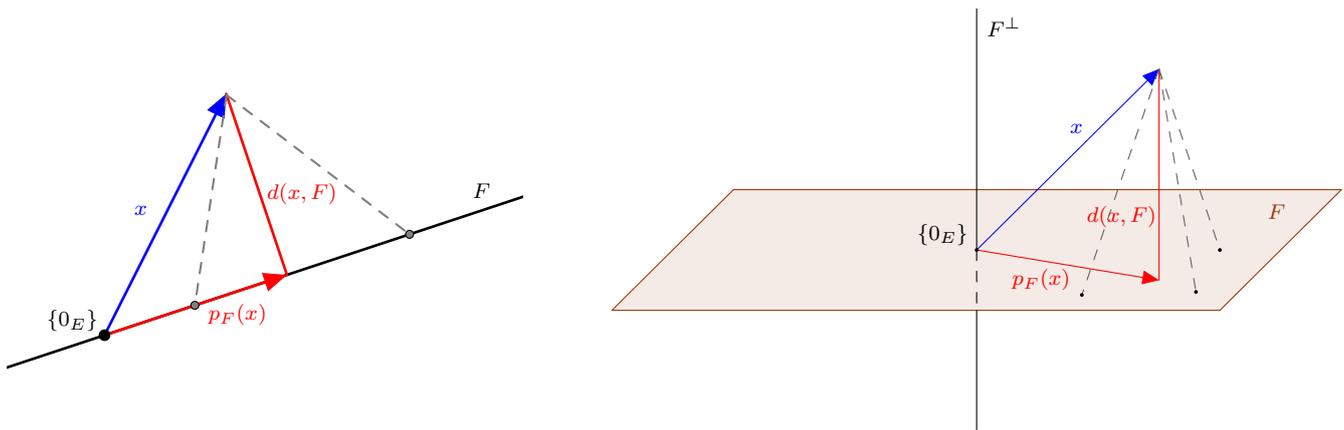
Preuve.

□

Définition.

On dit que $p_F(x)$ est la *meilleure approximation de x dans F au sens des moindres carrés*, c'est-à-dire pour la norme euclidienne, et on appelle *distance de x à F* le réel :

$$d(x, F) = \min\{\|x - y\|, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|.$$



Distance de x à une droite ou un plan.

Exercice. Déterminer la distance de $x = (2, 2, 2)$ au sous-espace $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - \frac{y}{2} + z = 0\}$.



Méthode. Minimisation d'une quantité à l'aide du projeté orthogonal.

Afin de minimiser une quantité à l'aide d'un projeté orthogonal, on procèdera comme suit :

- (i) s'il n'est pas donné dans l'énoncé, on identifie l'espace euclidien E et la norme euclidienne $\|\cdot\|$ en jeu ;
- (ii) on écrit la quantité à minimiser sous la forme $\|x - u\|^2$ en identifiant x un vecteur de E fixé et u un vecteur de E qui varie dans un sous-espace F de E ;
- (iii) on sait qu'un tel minimum existe, et est atteint en un unique point $u = p_F(x)$. On calcule donc le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F ;
- (iv) on calcule $\|x - p_F(x)\|^2$ $\left(\underset{\text{Pythagore}}{=} \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 \right)$ qui minimise cette quantité.

Exercice. Montrer que $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 dt$ existe et le calculer.



2.4 Pseudo-solutions d'un système linéaire

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = {}^tXY.$$

Soit $1 \leq p \leq n$. On considère le système linéaire suivant :

$$AX = B \tag{S}$$

où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice du système qu'on supposera de rang p , $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le second membre et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ le vecteur-colonne des inconnues.

On cherche à trouver l'ensemble des solutions de (S). Or, ce système a plus d'équations que d'inconnues ($n \geq p$), et cet ensemble de solutions est possiblement vide lorsque $B \notin \text{Im}(A)$.

Dans le cas où (S) n'admet pas de solution, on souhaite trouver un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ qui s'en « approche le plus », c'est-à-dire tel que $AX_0 - B$ soit « le plus proche possible » de $0_{n,1}$. On cherche ainsi X_0 satisfaisant :

$$\|AX_0 - B\| = \min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|.$$

Propriété 8

Soient $1 \leq p \leq n$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice de rang p , et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Il existe un unique vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant $\{\|AX - B\|, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.

Preuve. Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX \end{cases}$ l'application canoniquement associée à A , et soit

$F = \text{Im}(f)$. Par le théorème de la distance à un sous-espace, l'ensemble

$$\{\|Y - B\|, Y \in F\}$$

possède un minimum, atteint en un unique point $Y_0 \in \text{Im}(f)$ qui est le projeté orthogonal de B sur $\text{Im}(f)$.

Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) - \text{rg}(f) = p - \text{rg}(A) = p - p = 0$. Donc f est injective, et il existe un unique $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y_0 = AX_0$. \square

Remarques.

- Le vecteur X_0 du théorème précédent est ce qui « se rapproche le plus » d'une solution de $AX = B$ au sens des moindres carrés (c'est-à-dire de la norme euclidienne). On parle de *pseudo-solution* du système linéaire. Pour en apprendre plus à ce sujet, on pourra consulter l'épreuve d'ESSEC 2012.
- On peut montrer que $X_0 = ({}^tAA)^{-1}AB$ (formule non exigible qu'on démontrera en TP). Entre autres, ces résultats nous permettront en TP d'approximer un nuage de points par une droite « s'en approchant le plus », appelée *droite des moindres carrés*.