

Vecteurs aléatoires

1	Indépendance mutuelle	2
1.1	Indépendance mutuelle d'évènements	2
1.2	Indépendance mutuelle de variables aléatoires réelles	2
1.3	Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes	3
2	Vecteurs aléatoires	3
2.1	Généralités	3
2.2	Lois marginales	4
2.3	Vecteurs aléatoires discrets	4
3	Variables aléatoires fonctions de n variables aléatoires	5
3.1	Espérance, variance	5
3.2	Stabilité des lois usuelles par somme	6
3.3	Maximum, minimum	9

Compétences attendues.

- ✓ Déterminer la loi d'une somme : stabilité des lois usuelles, somme de lois exponentielles indépendantes.
- ✓ Déterminer la loi d'un maximum/minimum de variables aléatoires.

1 Indépendance mutuelle

1.1 Indépendance mutuelle d'évènements

Définition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements. Les évènements A_i sont *mutuellement indépendants* si :

- Cas d'une famille finie $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} : \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \forall (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k}).$$

- Cas d'une famille infinie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}, \forall (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k, 0 \leq i_1 < \dots < i_k,$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k})$$

Remarque. Si les évènements A_i sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. Mais la réciproque est fautive en générale.

1.2 Indépendance mutuelle de variables aléatoires réelles

Définition.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles définie sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que les variables aléatoires X_n sont *mutuellement indépendantes* si :

- Cas d'une suite finie $(X_1, \dots, X_n) : \text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ les évènements } [X_1 \leq x_1], \dots, [X_n \leq x_n] \text{ sont mutuellement indépendants, soit encore :}$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i).$$

- Cas d'une suite infinie $(X_n)_{n \geq 0} : \text{pour toute partie finie } I \subset \mathbb{N}, \text{ les variables } (X_i)_{i \in I} \text{ sont mutuellement indépendantes.}$

Propriété 1

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On a l'équivalence entre :

- (1) X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes ;
- (2) pour tous I_1, \dots, I_n intervalles de $\mathbb{R} :$

$$P([X_1 \in I_1] \cap \dots \cap [X_n \in I_n]) = \prod_{i=1}^n P([X_i \in I_i]);$$

Remarque. En prenant $I_3 = \dots = I_n = \mathbb{R}$ dans (ii), on obtient que si X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors X_1 et X_2 sont indépendantes (puisque $[X_i \in \mathbb{R}] = \Omega$). Plus généralement, on montre que :

Toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes est encore une famille de variables mutuellement indépendantes.

En particulier si X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes. Mais la **réciprocité** est **fausse** en générale !

Propriété 2 (Lemme de coalitions)

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) , et soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Alors toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, \dots, X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$.

Propriété 3

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Pour toutes fonctions f_1, \dots, f_n définies sur un ensemble contenant $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$ respectivement, les variables aléatoires $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Exemple. Si X_1, X_2, X_3 sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 + X_2$ et e^{X_3} sont indépendantes par le lemme de coalitions.

1.3 Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Propriété 4

Les variables aléatoires **discrètes** X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

2 Vecteurs aléatoires

2.1 Généralités

Définition.

Un vecteur aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans \mathbb{R}^n est la donnée d'un n -uplet de variables aléatoires réelles (X_1, \dots, X_n) définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

Définition.

On appelle *loi du vecteur* (X_1, \dots, X_n) la donnée de la fonction $F_{(X_1, \dots, X_n)}$ définie sur \mathbb{R}^n par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i]\right).$$

Propriété 5

On suppose que :

- les vecteurs (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) ont la même loi ;
- g est une fonction continue^a sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} .

Alors les variables aléatoires $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.

^aPour la définition de la continuité d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , je vous renvoie au **Chapitre 17. Fonctions de plusieurs variables sur \mathbb{R}^n** .

2.2 Lois marginales**Définition.**

Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n . On appelle *i*-ème loi marginale de (X_1, X_2, \dots, X_n) la loi de X_i .

À retenir. Lien entre loi du vecteur aléatoire et lois marginales.

- La connaissance de la loi de (X_1, \dots, X_n) permet de retrouver les lois marginales, mais l'inverse n'est pas vrai : on ne peut pas en général retrouver la loi du vecteur à partir des lois marginales.
- Dans le cas particulier où les variables X_1, \dots, X_n sont **mutuellement indépendantes**, on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n).$$

Ainsi, si les variables sont **mutuellement indépendantes**, la loi du vecteur (X_1, \dots, X_n) se retrouve à partir des lois marginales par produit.

2.3 Vecteurs aléatoires discrets**Définition.**

Un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) sur (Ω, \mathcal{A}, P) est *discret* si toutes les variables X_1, \dots, X_n sont discrètes.

Propriété 6

Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire discret. Alors la loi de (X_1, \dots, X_n) est entièrement déterminée par la donnée de :

- $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$;
- $P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n])$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$.

Propriété 7

Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire discret. Alors la i -ème loi marginale de (X_1, \dots, X_n) , c'est-à-dire la loi de X_i , est donnée pour tout $x_i \in X_i(\Omega)$ par :

$$P(X_i = x_i) = \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_{i-1}(\Omega) \times X_{i+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)}} P\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j = x_j]\right).$$

Preuve. C'est la formule des probabilités totales appliquée au SCE formé des $\bigcap_{1 \leq j \neq i \leq n} [X_j = x_j]$ où $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ parcourt l'ensemble $X_1(\Omega) \times \dots \times X_{i-1}(\Omega) \times X_{i+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$. \square

Propriété 8

Si g est une fonction définie sur \mathbb{R}^n à valeurs réelles, et si (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire discret sur (Ω, \mathcal{A}, P) , alors $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire discrète, et :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \\ g(x_1, \dots, x_n) = y}} P\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j = x_j]\right)$$

Remarque. En particulier, si (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire discret, alors :

$$\sum_{i=1}^n X_i, \quad \min(X_1, \dots, X_n), \quad \max(X_1, \dots, X_n), \quad \prod_{i=1}^n X_i$$

sont des variables aléatoires discrètes.

3 Variables aléatoires fonctions de n variables aléatoires

3.1 Espérance, variance

Propriété 9 (*Linéarité de l'espérance*)

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant toutes une espérance. Alors pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une espérance, et :

$$E(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 E(X_1) + \dots + \lambda_n E(X_n).$$

Preuve. On procède par récurrence sur n , la formule étant déjà connue pour $n = 2$. \square

Propriété 10

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires **indépendantes** sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant toutes une espérance. Alors $X_1 \times \dots \times X_n$ admet une espérance, et :

$$E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n).$$

Preuve. Par récurrence sur n .

Init. Pour $n = 2$, la propriété est déjà connue.

Hér. On suppose la propriété vraie au rang n . Au rang $n + 1$: on considère $n + 1$ variables aléatoires X_1, \dots, X_{n+1} indépendantes. Alors $X_1 \dots X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions, et elles admettent toutes deux une espérance par hypothèse de récurrence. Alors (propriété au rang $n = 2$) $X_1 \dots X_n X_{n+1}$ admet une espérance, et :

$$E(X_1 \dots X_n X_{n+1}) = E(X_1 \dots X_n)E(X_{n+1}) \stackrel{HR}{=} E(X_1) \dots E(X_n)E(X_{n+1}).$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

On conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$ par principe de récurrence. □

Propriété 11

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires **indépendantes** sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant toutes une variance. Alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance, et :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Plus généralement, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une variance, et :

$$V(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1^2 V(X_1) + \dots + \lambda_n^2 V(X_n).$$

Preuve. On procède comme dans la preuve précédente. Laissée en exercice. □

Remarque. Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires discrètes et non nécessairement indépendantes, on peut montrer par récurrence la formule suivante :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

3.2 Stabilité des lois usuelles par somme

Théorème 12 (Stabilité de l'ensemble des lois binômiales)

Hypothèses : |

- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(m_i, p)$.
- X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

Alors $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n m_i, p\right)$.

Preuve. Par récurrence sur n .

Init. Pour $n = 2$, la propriété est déjà connue.

Hér. On suppose la propriété vraie au rang n . Au rang $n + 1$: on considère $n + 1$ variables aléatoires X_1, \dots, X_{n+1} indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(m_i, p)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions. De plus, par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n m_i, p\right).$$

Ainsi (propriété au rang $n = 2$) :

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) + m_{n+1}, p\right).$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

On conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$ par principe de récurrence. □

Conséquence. En notant que $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$:

$$\text{Hypothèses : } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p). \\ \bullet X_1, \dots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes.} \end{array} \right.$$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

On justifie ici ce qu'on utilise déjà depuis longtemps, à savoir qu'une loi binomial $\mathcal{B}(n, p)$ est le nombre de succès lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p .

Remarque. Si on connaît l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli (p et $p(1 - p)$ resp.), alors on retrouve ici sans calcul celles d'une loi binomiale. En effet, si $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors $X = \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, et :

$$E(X) \stackrel{\text{lin. de } E}{=} E(X_1) + \dots + E(X_n) = np,$$

$$V(X) \stackrel{\text{ indép. des } X_i}{=} V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1 - p).$$

Théorème 13 (Stabilité de l'ensemble des lois de Poisson)

$$\text{Hypothèses : } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i). \\ \bullet X_1, \dots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes.} \end{array} \right.$$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

Preuve. Par récurrence sur n . □

Théorème 14 (Stabilité de l'ensemble des lois gamma)

$$\text{Hypothèses : } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, X_i \hookrightarrow \gamma(\nu_i). \\ \bullet X_1, \dots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes.} \end{array} \right.$$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \gamma\left(\sum_{i=1}^n \nu_i\right).$$

Preuve. Par récurrence sur n . □

Conséquence.

Hypothèses : $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1) = \gamma(1). \\ \bullet X_1, \dots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes.} \end{array} \right.$

Alors $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \gamma(n)$.

 **Méthode. Loi d'une somme de variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.**

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour déterminer la loi de la somme $Y = X_1 + \dots + X_n$ de lois exponentielles, on procèdera comme suit :

(i) On écrit Y sous la forme $Y = \frac{1}{\lambda}(\lambda X_1 + \dots + \lambda X_n)$.

(ii) En se servant de l'équivalence

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1),$$

on en déduit que $\lambda X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ pour tout i .

(iii) Comme de plus les λX_i sont mutuellement indépendants (d'après le lemme des coalitions), et suivent toutes la loi $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$, on en déduit par stabilité de la loi gamma :

$$\lambda X_1 + \dots + \lambda X_n = \lambda Y \hookrightarrow \gamma(n).$$

(iv) On détermine finalement une densité de Y par transformation affine.

Remarque. On dit alors que Y suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$ (hors programme).

Théorème 15 (Stabilité de l'ensemble des lois normales)

Hypothèses : $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2). \\ \bullet X_1, \dots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes.} \end{array} \right.$

Alors $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$.

Preuve. Par récurrence sur n . □

Remarque. Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{N}(0, n)$, et donc :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

3.3 Maximum, minimum

Propriété 16

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

Posons $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[Z \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x].$$

De plus, si X_1, \dots, X_n sont **mutuellement indépendantes**, alors :

$$F_Z(x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x).$$

Preuve. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le plus grand des X_i est inférieur ou égal à x si, et seulement si, **tous** les X_i sont inférieurs ou égaux à x . D'où l'égalité entre évènements :

$$[Z \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x].$$

En prenant la probabilité de ces évènements, on obtient :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]\right) \stackrel{\text{indép. des } X_i}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x).$$

□

Remarque. Rappelons que dans le cas d'une variable **discrète** X à valeur dans \mathbb{Z} , on utilisera :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = F_X(k) - F_X(k - 1).$$

Exercice. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathcal{U}([1, N])$. Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Propriété 17

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

Posons $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[Z > x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i > x].$$

De plus, si X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors :

$$1 - F_Z(x) = \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x)).$$

Preuve. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le plus petit des X_i est supérieur strictement à x si, et seulement si, **tous** les X_i sont supérieurs strictement à x . D'où l'égalité entre évènements :

$$[Z > x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i > x].$$

En prenant la probabilité de ces évènements, on obtient :

$$P(Z > x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > x]\right) \stackrel{\text{indép. des } X_i}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = \prod_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq x)) = \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x))$$

et donc :

$$1 - F_Z(x) = 1 - P(Z \leq x) = P(Z > x) = \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x)).$$

□

Remarque. Rappelons que pour une variable **discrète** X à valeur dans \mathbb{Z} , on utilisera :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k).$$

Exercice. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.