Chapitre 12

Couples de variables aléatoires à densité

Compétences attendues.

✓ Déterminer la densité d'une somme de variables aléatoires continues.

✓ Déterminer la loi d'un maximum/minimum de variables aléatoires continues.

Mathieu Mansuy

Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-besancon.fr`

1 Somme de deux variables à densité indépendantes

Dans tout ce chapitre, les variables X et Y sont supposées **à densité**, de densités respectives f et g.

1.1 Produit de convolution

Rappels.

- On dit que les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les évènements $[X \leq x]$ et $[Y \leq y]$ sont indépendants, c'est-à-dire $P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions φ, ψ dont les ensembles de définition contiennent $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ sont indépendantes (*Lemme de coalition*).

Théorème 1 (*Produit de convolution*)

Supposons que les variables aléatoires à densité X et Y sont **indépendantes**. Supposons de plus que la fonction

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

soit définie et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors :

- $X + Y$ est une variable aléatoire à densité ;
- la fonction h est une densité de $X + Y$ (en posant $h(x) = 0$ en les réels x où l'intégrale diverge).

Vocabulaire. La fonction h est appelée le *produit de convolution des fonctions f et g*, souvent notée $h = f * g$. On notera la similitude avec le produit de convolution discret donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)$$

pour des variables aléatoires discrètes et indépendantes X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par changement de variable affine (donc licite) $u = x - t$, il suit que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence. En particulier, on notera que $f * g = g * f$.

Théorème 2

Hypothèses :
- X et Y sont **indépendantes** ;
- f (ou g) est **bornée**.

Alors la fonction

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$, de sorte que $X + Y$ est une variable aléatoire à densité, de densité h.

Remarques.

- Le programme officiel précise :

  « *En cas d'utilisation du produit de convolution, la preuve de sa légitimité n'est pas exigible des candidats* ».

En pratique, il n'y aura jamais aucune subtilité sur la continuité de h, et on pourra toujours dire sans précaution (autre que l'indépendance !) que h est une densité de $X+Y$.

- Toutes les lois continues usuelles ont une densité bornée sauf $\gamma(\nu)$ lorsque $\nu < 1$.

Méthode. Produit de convolution pour des variables à densité.

Pour déterminer la densité d'une somme $X+Y$ de variables continues, on procèdera comme suit :

Étape 1 : Justification du produit de convolution.

*On précise bien que X et Y sont **indépendantes**.*
Si l'une des densités f ou g est bornée, alors $X+Y$ est à densité. On l'admettra sinon.
Une densité de $X+Y$ est :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

*Il s'agit à présent de calculer cette intégrale à $x \in \mathbb{R}$ **fixé**.*

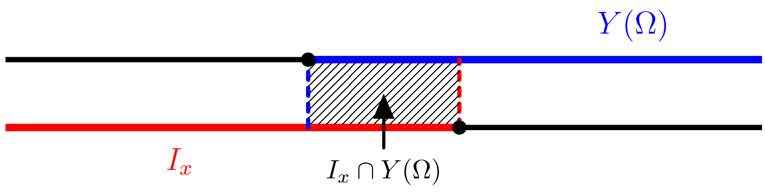
Étape 2 : Réduction du domaine d'intégration.

On le fera en trois temps :

- *f étant nulle en dehors de $X(\Omega)$, on réduit le domaine d'intégration à $X(\Omega)$:*
$$h(x) = \int_{X(\Omega)} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
- *On effectue le changement de variables $u = x - t$, affine donc licite, dans l'intégrale :*
$$h(x) = \int_{I_x} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u.$$
où I_x est le nouveau domaine d'intégration (dont les bornes vont dépendre de x).
- *g étant nulle en dehors de $Y(\Omega)$, on réduit de nouveau le domaine d'intégration à $I_x \cap Y(\Omega)$:*
$$h(x) = \int_{I_x \cap Y(\Omega)} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Étape 3 : Détermination de $I_x \cap Y(\Omega)$.

L'intervalle d'intégration $I_x \cap Y(\Omega)$ dépendra de x, ce qui nous amènera à distinguer plusieurs cas suivant x pour le déterminer. On pourra pour cela s'aider du dessin suivant, sur lequel on représente I_x et $Y(\Omega)$ afin de déterminer $I_x \cap Y(\Omega)$:



Étape 4 : Calcul de $h(x)$.

Pour chaque cas à considérer, on calcule enfin $h(x)$ en remplaçant $f(x-u)$ et $g(u)$ par leur valeur.

Exercice. Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes deux la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$. Déterminer la loi de $X+Y$.

1.2 Stabilité des lois γ

Théorème 3 (*Stabilité par somme des lois gamma*)

Hypothèses :
- $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ et $Y \hookrightarrow \gamma(\nu')$;
- X et Y sont indépendantes.

Alors $X + Y \hookrightarrow \gamma\left(\nu + \nu'\right)$.

Preuve. Fixons pour commencer f une densité de X et g une densité de Y en posant pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

En particulier, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

Considérons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) \, \mathrm{d}t.$$

On admet[1] que h est bien définie et continue sauf peut-être en 0, de sorte qu'il s'agit d'une densité de $X + Y$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et calculons $h(x)$. Puisque f est nulle en dehors de $\mathbb{R}_+^*$:

$$h(x) = \int_{0}^{+\infty} f(t) g(x-t) \, \mathrm{d}t.$$

[1] Si $\nu \geq 1$ (ou $\nu' \geq 1$), alors cela résulte du Théorème 2 puisque f (ou g) est alors bornée.

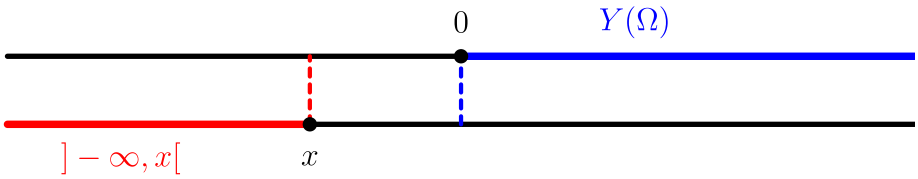
Effectuons le changement de variable $u = x - t$, affine donc licite, dans cette intégrale. Calculons $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$, et $u : x \to -\infty$ lorsque $t : 0 \to +\infty$, d'où :

$$h(x) = \int_x^{-\infty} f(x-u)g(u)(-\mathrm{d}u) = \int_{-\infty}^{x} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u.$$

g étant nulle en dehors de $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

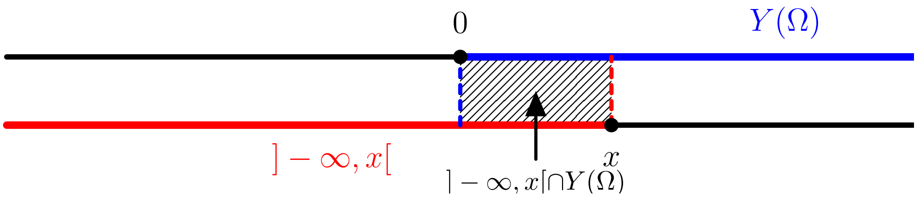
$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u = \int_{]-\infty,x[\cap\mathbb{R}_+^*} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Déterminons $]-\infty,x[\cap\mathbb{R}_+^*$. Représentons pour cela les deux intervalles $]-\infty,x[$ et $]0,+\infty[$:



Selon la valeur de x, deux cas sont possibles (qu'on détermine grâce au dessin précédent) :

- **Cas $x \leq 0$.** C'est la situation représentée ci-dessus. Dans ce cas, $]-\infty,x[\cap\mathbb{R}_+^* = \emptyset$, de sorte que $f(x-u)g(u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, et donc $h(x) = 0$.
- **Cas $x > 0$.** On est dans la situation suivante :



Dans ce cas, $]-\infty,x[\cap\mathbb{R}_+^* =]0,x[$, et on peut poursuivre le calcul :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu')}\int_0^x (x-u)^{\nu-1}u^{\nu'-1}e^{-(x-u)}e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu')}\int_0^x \left(1-\frac{u}{x}\right)^{\nu-1} u^{\nu'-1}e^{-x}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

À l'aide du changement de variable affine (donc licite) $v = \dfrac{u}{x}$, on obtient :

$$h(x) = \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu')}\int_0^1 (1-v)^{\nu-1}\,(xv)^{\nu'-1}\,e^{-x}x\,\mathrm{d}v = \underbrace{\left(\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu')}\int_0^1 (1-v)^{\nu-1}\,(v)^{\nu'-1}\,\mathrm{d}v\right)}_{=:B(\nu,\nu')} x^{\nu+\nu'-1}e^{-x}.$$

Puisque h est une densité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad\Rightarrow\quad B(\nu,\nu')\underbrace{\int_0^{+\infty} x^{\nu+\nu'-1}e^{-x}\mathrm{d}x}_{=\Gamma(\nu+\nu')} = 1.$

Ainsi, $B(\nu,\nu') = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+\nu')}$, et donc : $\quad h(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+\nu')}x^{\nu+\nu'-1}e^{-x}.$

Finalement, on obtient :

$$h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu+\nu')}x^{\nu+\nu'-1}e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnait la densité de la loi $\gamma(\nu+\nu')$, donc $X+Y \hookrightarrow \gamma(\nu+\nu')$. □

Remarque. Si X et Y sont indépendantes et suivent une loi $\mathscr{E}(1) = \gamma(1)$, alors $X+Y \hookrightarrow \gamma(2)$ et on retrouve le résultat obtenu plus haut.

Remarque. Si on se souvient que la somme de deux lois γ est encore une loi $\gamma(\nu)$, il est facile de retrouver le paramètre de cette loi puisque $\nu = E(X+Y) = E(X)+E(Y) = \nu_1+\nu_2$.

1.3 Stabilité des lois normales

Théorème 4 (*Stabilité de l'ensemble des lois normales*)

Hypothèses :
- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m', \sigma'^2)$;
- X et Y sont indépendantes.

Alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.

Preuve. On commence par le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, s^2)$. Puisque X et Y sont indépendantes et que la densité d'une loi normale est bornée, $X + Y$ est donc à densité, et une densité de $X + Y$ est donnée par $h = f_X * f_Y$, dont on sait de plus qu'elle est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}$, aucune réduction du domaine d'intégration n'est à prévoir, et on peut passer directement au calcul de l'intégrale $h(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ **fixé** :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2s^2}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2s^2} \left[s^2 t^2 + t^2 - 2xt \right] - \frac{x^2}{2s^2} \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Posons $\nu = \sqrt{1 + s^2}$, et procédons à une factorisation canonique de l'expression entre crochets :

$$(1 + s^2)t^2 - 2xt = \nu^2 t^2 - 2xt = \left(\nu t - \frac{1}{\nu} x \right)^2 - \frac{x^2}{\nu^2}$$

On obtient en remplaçant dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2s^2} \left(\nu t - \frac{x}{\nu} \right)^2 + \frac{x^2}{2s^2\nu^2} - \frac{x^2}{2s^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2\nu^2} \right)}}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2s^2} \left(\nu t - \frac{x}{\nu} \right)^2 \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2} \frac{\nu^2 - 1}{s^2\nu^2}}}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2s^2} \left(\nu t - \frac{x}{\nu} \right)^2 \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2\nu^2}}}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{s} t - \frac{x}{s\nu} \right)^2 \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables affine (donc licite) $u = \frac{\nu}{s} t - \frac{x}{s\nu}$, on obtient :

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\nu^2}}}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 \right) \frac{s}{\nu} \mathrm{d}u = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\nu^2}}}{2\pi s} \frac{s}{\nu} \sqrt{2\pi} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\nu^2}}}{\nu\sqrt{2\pi}}$$

Ainsi $X + Y$ suit une loi $\mathcal{N}(0, \nu^2) = \mathcal{N}(0, 1 + s^2)$.

Traitons à présent le cas général en supposant $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m', \sigma')$. Posons :

$$X' = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad Y' = \frac{Y - m'}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}).$$

X et Y étant indépendantes, il en est de même pour X' et Y' par lemme de coalition. Et par ce qu'on vient de montrer :

$$X' + Y' \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, 1 + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} \right).$$

Ainsi :

$$X + Y = \sigma(X' + Y') + m + m' \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m + m', \sigma^2 \left(1 + \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 \right) = \mathcal{N}\left(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2 \right).$$

$\square$

Remarque. De même, si on se souvient que la somme de deux lois normales indépendantes est encore une loi normale, les paramètres de cette loi se retrouvent facilement : son espérance est la somme des espérances de X et de Y (par linéarité de l'espérance), et sa variance est la somme des variances (car X et Y sont indépendantes).

2 Maximum, minimum

Propriété 5

Soient X, Y des variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Posons $Z = \max(X, Y)$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$[Z \leq z] = [X \leq z] \cap [Y \leq z].$$

De plus, si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad F_Z(z) = F_X(z) \times F_Y(z).$$

Preuve. Pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$Z \leq z \quad \Leftrightarrow \quad \max(X, Y) \leq z \quad \Leftrightarrow \quad X \leq z \textbf{ et } Y \leq z.$$

D'où l'égalité $[Z \leq z] = [X \leq z] \cap [Y \leq z]$. On obtient en prenant la probabilité de ces évènements :

$$P(Z \leq z) = P([X \leq z] \cap [Y \leq z]) = P(X \leq z)P(Y \leq z) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$

D'où $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. □

Propriété 6

Soient X, Y des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Posons $T = \min(X, Y)$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$[T > z] = [X > z] \cap [Y > z].$$

De plus, si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad 1 - F_T(z) = (1 - F_X(z)) \times (1 - F_Y(z)).$$

Preuve. Pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$T > z \quad \Leftrightarrow \quad \min(X, Y) > z \quad \Leftrightarrow \quad X > z \textbf{ et } Y > z.$$

D'où l'égalité $[T > z] = [X > z] \cap [Y > z]$. On obtient en prenant la probabilité de ces évènements :

$$P(T > z) = P([X > z] \cap [Y > z]) = P(X > z)P(Y > z) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$

D'où en passant aux évènements contraires :

$$1 - P(T \leq z) = (1 - P(X \leq z)) \times (1 - P(Y \leq z)).$$

Ainsi, $1 - F_T(z) = (1 - F_X(z)) \times (1 - F_Y(z))$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. □

3 Espérance, variance

Propriété 7 *(Linéarité de l'espérance)*

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance, et :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Propriété 8

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité **indépendantes** et admettant une espérance. Alors la variable aléatoire XY admet une espérance, et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Propriété 9

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité **indépendantes** et admettant une variance. Alors la variable aléatoire $X + Y$ admet une variance, et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Remarque. On pourrait définir pour les variables à densité, de la même façon que pour les variables discrètes, la notion de covariance. Cette notion et les résultats qui gravitent autour sont hors-programme mais sont parfois introduits dans certains problèmes de concours.