Chapitre 10b

Lois à densité usuelles

Compétences attendues.

✓ Connaitre une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance des lois usuelles.

✓ Savoir utiliser la table de valeurs de la loi normale centrée réduite.

Mathieu Mansuy

Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-besancon.fr`

1 Loi uniforme

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi uniforme sur un intervalle* $[a,b]$ (avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $a<b$) si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\le t\le b,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On note alors $X\hookrightarrow\mathscr{U}([a,b])$.

Remarque. Les fonctions $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b[}$, $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{]a,b]}$ et $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{]a,b[}$ sont aussi des densités de $X\hookrightarrow\mathscr{U}([a,b])$.

Propriété 1

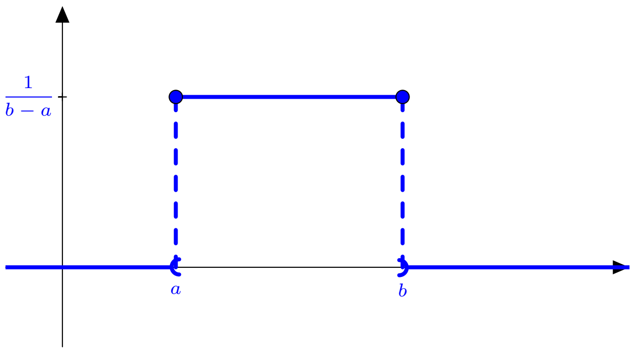
Soit X une variable de loi uniforme sur $[a,b]$. La fonction de répartition de X est :

$$F:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a\le x\le b,\\ 1 & \text{si } b<x.\end{cases}$$

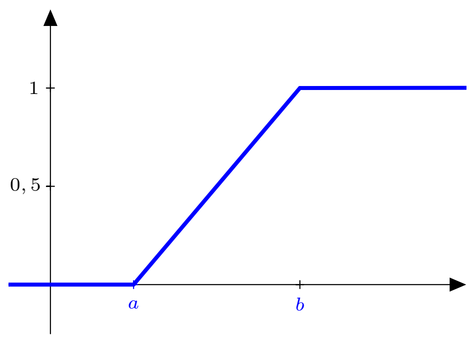
De plus, X admet une espérance et une variance, et :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\qquad\text{et}\qquad V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Représentations graphiques.



Densité de la loi uniforme sur $[a,b]$.



Fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a,b]$.

Cas particulier. Si $X\hookrightarrow\mathscr{U}([0,1])$, alors X admet pour densité et fonction de répartition :

$$f:t\in\mathbb{R}\mapsto\mathbb{1}_{[0,1]}(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le t\le 1,\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\qquad\text{et}\qquad F:x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0,\\ x & \text{si } 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

De plus, $E(X)=\dfrac{1}{2}$ et $V(X)=\dfrac{1}{12}$.

Propriété 2

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. Alors :

$$X\hookrightarrow\mathscr{U}([0,1])\quad\Leftrightarrow\quad Y=a+(b-a)X\hookrightarrow\mathscr{U}([a,b]).$$

Preuve.

□

2 Loi exponentielle

Définition.

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi exponentielle de paramètre* λ si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ \lambda\, e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

Propriété 3

Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition est donnée par :

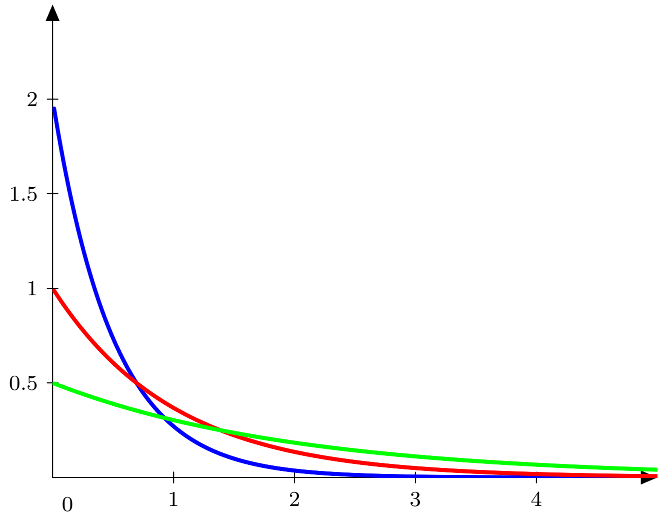
$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0? \end{cases}$$

De plus, X admet une espérance et une variance, et :

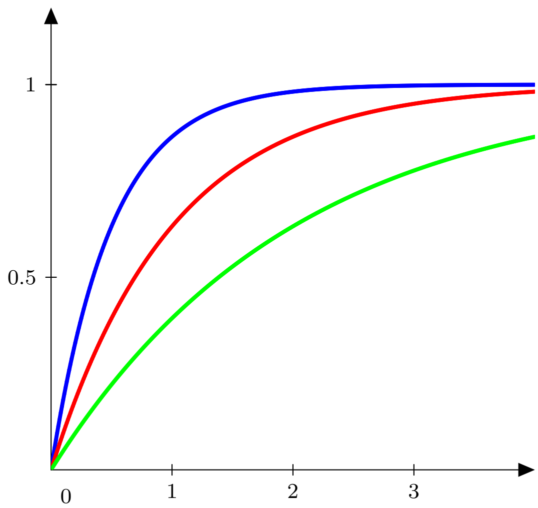
$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Représentations graphiques.

$\lambda = 2, 1, 0.5$



Densité de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.



Fonction de répartition de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

Propriété 4

Soit $\lambda > 0$. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \lambda\, X \hookrightarrow \mathscr{E}(1).$$

3 Loi normale

Définition.

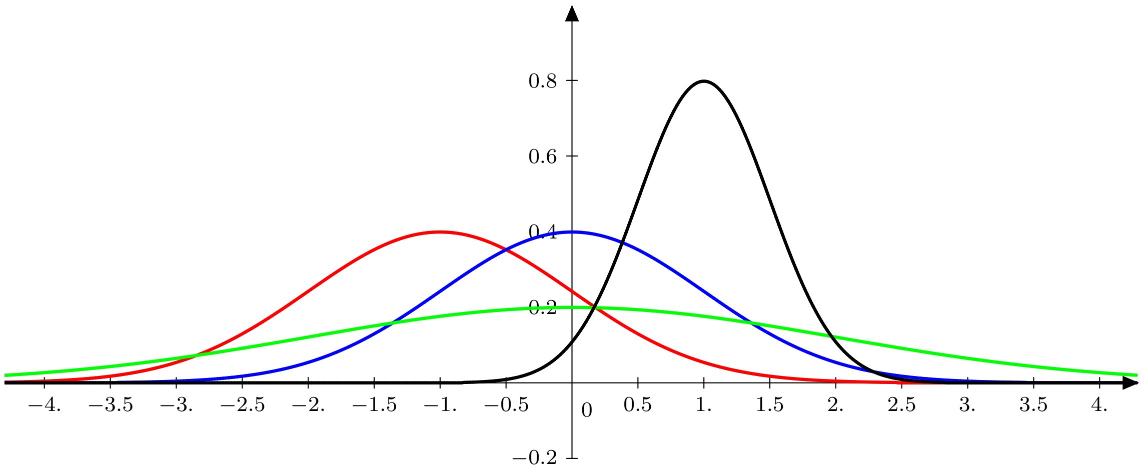
Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi normale de paramètres* (μ, σ^2) si elle admet pour densité la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Représentations graphiques.

$(\mu, \sigma) =$(0,1), $(0, 2)$, $(-1, 1)$, $(1, 1/2)$



Densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Le saviez-vous ?

Plusieurs mathématiciens peuvent revendiquer la découverte de la loi normale. En 1733, Abraham de Moivre est le premier à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale. Plus tard en 1777, Pierre-Simon de Laplace reprend les travaux de de Moivre et généralise son théorème limite à l'aide de la fonction Gamma d'Euler. Il obtient cette même loi, mais en tant qu'approximation de la loi binomiale. Peu de temps après, en 1810, c'est Carl Friedrich Gauss qui l'obtient à son tour en cherchant à minimiser l'erreur de trajectoire d'un objet céleste.

Dans le courant du $19^{\text{ème}}$ siècle, différents noms sont attribués à cette loi, comme *courbe des possibles*, *loi de fréquence des erreurs*, *loi de Gauss* chez les allemands ou les anglo-saxons, ou encore *loi de Laplace* en France. Françis Galton (1877) parle lui de *courbe de forme parfaitement normale*. Le dernier mot revient finalement à Henri Poincaré en 1893 devant ses étudiants : « *Je dirai, pour abréger, que la loi de probabilité est normale, lorsque la valeur de la probabilité est représentée par cette intégrale* ».

L'adjectif « normal » vient du fait que c'est la loi la plus couramment rencontrée dans la nature (nous l'expliquerons dans un prochain chapitre). Cette dénomination a aussi l'avantage de ne pas fixer la paternité de cette loi, qui est sujette à controverses.

Henri Poincaré (1854 - 1912)

Propriété 5

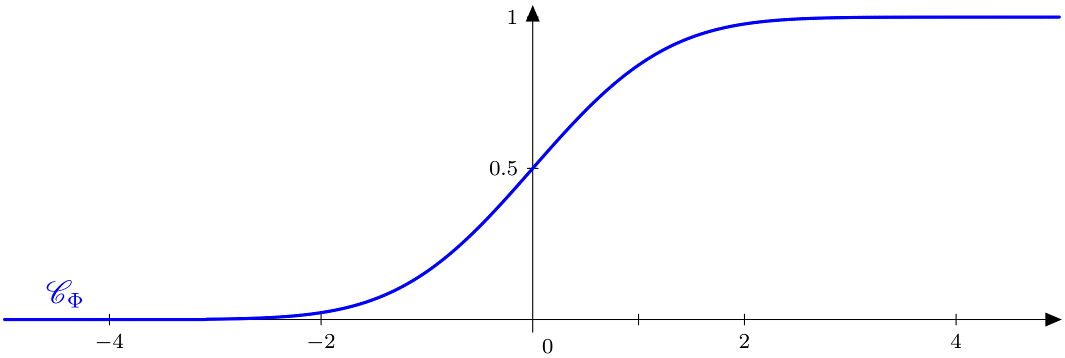
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. X admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Cas particulier. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors X admet pour densité $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. On note $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de répartition de X, qui s'exprime sous forme intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Représentation graphique.



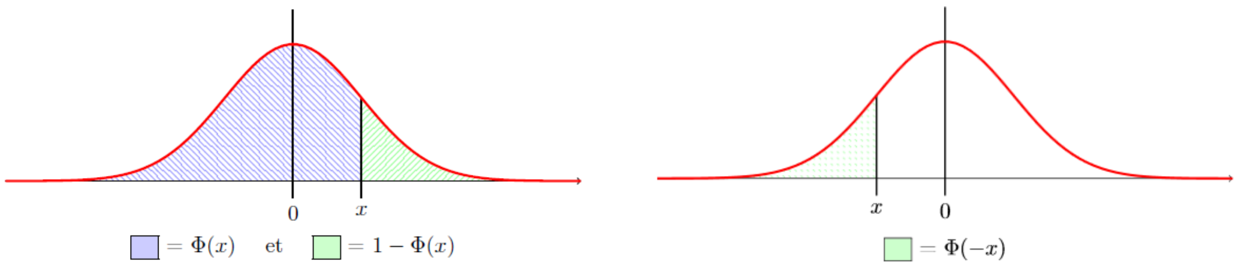
Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Remarque. On ne peut pas exprimer Φ à l'aide de fonctions usuelles (résultat difficile prouvé par Liouville en 1840). Pour des calculs numériques, on utilise la table de valeurs de la loi normale centrée réduite fournie en fin de chapitre, ainsi que le résultat suivant.

Propriété 6

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. En particulier $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Illustration graphique. Ce résultat provient de la parité de φ et peut s'obtenir graphiquement :



Preuve.

□

Exercice. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer une valeur approchée de $P(2 \leq X \leq 3)$ et de $P(-3 \leq X \leq 1)$.

Propriété 7

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

En particulier :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve.

$\square$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, il suffit de se rappeler que $aX + b$ suit une loi normale, car on retrouve alors les paramètres en calculant :

$$E(aX+b) = aE(X) + b = a\mu + b \quad \text{et} \quad V(aX+b) = a^2V(X) = a^2\sigma^2.$$

Exercice.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de Φ, μ et σ.
2. Application. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(3, \frac{1}{4})$. Donner une valeur approchée de $P(2 \leq X \leq 4)$ et de $P(X \geq 0)$.

4 Loi gamma

Rappels. On définit la *fonction Gamma d'Euler*, notée Γ, sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall \nu \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Rappelons que :

- $\forall \nu > 0,\ \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$,
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

De plus, pour tout $\nu > 0$, $\Gamma(\nu)$ est strictement positif.

Définition.

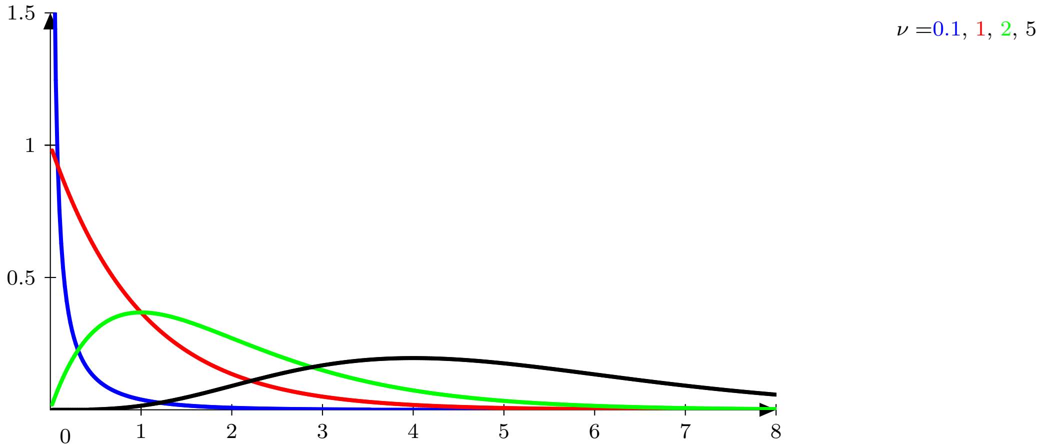
Soit $\nu > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi gamma de paramètre* ν si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1}e^{-t} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$.

Remarque. Vérifions que f est bien une densité de probabilité.

Représentations graphiques.



Densité de la loi Gamma $\gamma(\nu)$.

Remarques.

- La densité d'une loi $\gamma(\nu)$ est bornée si, et seulement si, $\nu \geq 1$.
- Puisque $\Gamma(1) = 0! = 1$, une densité de la loi $\gamma(1)$ est :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(1)}t^{1-1}e^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ e^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

  Ainsi, la loi $\gamma(1)$ n'est autre que la loi $\mathscr{E}(1)$.

Propriété 8

Soit $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$. Alors X admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \nu \quad \text{et} \quad V(X) = \nu.$$

5 Simulation en Python

Rappelons que le sous-module `numpy.random` est dédié aux simulations de variables aléatoires.

Définition.

On importe la bibliothèque `numpy.random` en écrivant l'une ou l'autre des instructions suivantes (on privilégiera la deuxième) :

`from numpy.random import *` ou `import numpy.random as rd`

Définition.

- `rd.random()` simule une réalisation de la loi uniforme sur $[0, 1]$.
- `rd.exponential(1/a)` simule une réalisation de la loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$ de paramètre $a > 0$.
- `rd.gamma(v)` simule une réalisation de la loi gamma $\gamma(v)$ de paramètre $v > 0$.
- `rd.normal(m,sigma)` simule une réalisation de la loi normale $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Remarques.

- On peut obtenir r simulations d'une loi usuelle sous la forme d'un vecteur de taille r, ou $r \times s$ simulations sous la forme d'une matrice de $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ en ajoutant à ces commandes l'argument `r` ou `[r,s]` respectivement. Par exemple :
  - `rd.exponential(1/a,r)` renvoie un vecteur contenant r simulations de la loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$;
  - `rd.normal(m,sigma,[r,s])` renvoie $r \times s$ simulations de la loi normale de paramètres m et σ^2.
- Attention à certains paramètres :
  - le paramètre de la loi exponentielle choisi par `Python` est l'inverse de celui du cours.
  - le second paramètre de la loi normale est σ et non σ^2.
  - par défaut, `rd.normal()` simule la loi normale centrée réduite.
- La simulation d'une variable de loi uniforme sur $[a, b]$, où $a < b$, s'obtient à l'aide de la commande hors programme `rd.uniform(a,b)` ou bien, en restant dans le cadre du programme, par la commande `(b-a)*rd.random()+a`.

Sur l'utilisation de la fonction de répartition Φ associée à la loi $\mathscr{N}(0, 1)$ en `Python`, elle nécessite d'importer la librairie `spicy.special` avec la commande suivante :

`import spicy.special as sp`

Définition.

- Pour tout réel x, la commande `sp.ndtr(x)` renvoie la valeur de $\Phi(x)$.
- (Hors programme) Pour tout réel $y \in]0, 1[$, la commande `sp.ndtri(y)` renvoie la valeur de $\Phi^{-1}(y)$

6 Tableau récapitulatif

Lois à densité usuelles

Nom	Notation	Une densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
Loi uniforme sur $[a,b]$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$	$\mathscr{U}([a,b])$	$x\mapsto\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a\leq x\leq b\\ 1 & \text{si } x>b\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi uniforme sur $[0,1]$	$\mathscr{U}([0,1])$	$x\mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{12}$
Loi exponentielle de paramètre λ $\lambda\in]0,+\infty[$	$\mathscr{E}(\lambda)$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi exponentielle de paramètre 1 = Loi gamma de paramètre 1	$\mathscr{E}(1)=\gamma(1)$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ e^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$	1	1
Loi normale centrée réduite	$\mathscr{N}(0,1)$	$x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	$\Phi : x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$	0	1
Loi normale (ou de Laplace-Gauss) $m\in\mathbb{R},\sigma^2\in]0,+\infty[$	$\mathscr{N}(m,\sigma^2)$	$x\mapsto\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	$x\mapsto\Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$	m	σ^2
Loi gamma de paramètre ν $\nu\in]0,+\infty[$	$\gamma(\nu)$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\displaystyle\int_0^x t^{\nu-1}e^{-t}\mathrm{d}t & \text{si } x>0\end{cases}$	ν	ν

Table de la loi normale centrée réduite

Le tableau qui suit comporte les valeurs de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

Utilisation. On lit les décimales en suivant les lignes, et les centièmes en colonnes. Par exemple, la valeur de $\Phi(1.65)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05. On trouve $\Phi(1.65) = 0.9505$, à 10^{-4} près.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Rappelons quelques propriétés de Φ :

- Φ est continue et strictement croissante, et $\Phi(\mathbb{R}) =]0,1[$. Ainsi :
  - pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique $t_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(t_\alpha) = \alpha$ (théorème de la bijection).
  - pour tout $x \geq 3.99$, $\Phi(x) = 1.000$, à 10^{-4} près.
- $\Phi(0) = 0.5$ et $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour toute autre loi normale, on se rappellera que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$